

Smartphone e Tracker

Video Analysis and Modeling Tool

per la meccanica

Massimiliano Malgieri, Università di Pavia

Pasquale Onorato, Università di Trento



AIF Pavia - XXXIX Corso di aggiornamento
in Fisica – 19 Ottobre 2016





Vantaggi

- Bassi costi e facile reperibilità dei materiali
- Lavoro individuale o per piccoli gruppi
- Spazi e strumentazioni necessarie ridotti
- Possibile l'analisi del moto in due dimensioni
- I nuovi smartphone con slow-motion offrono possibilità più ampie.

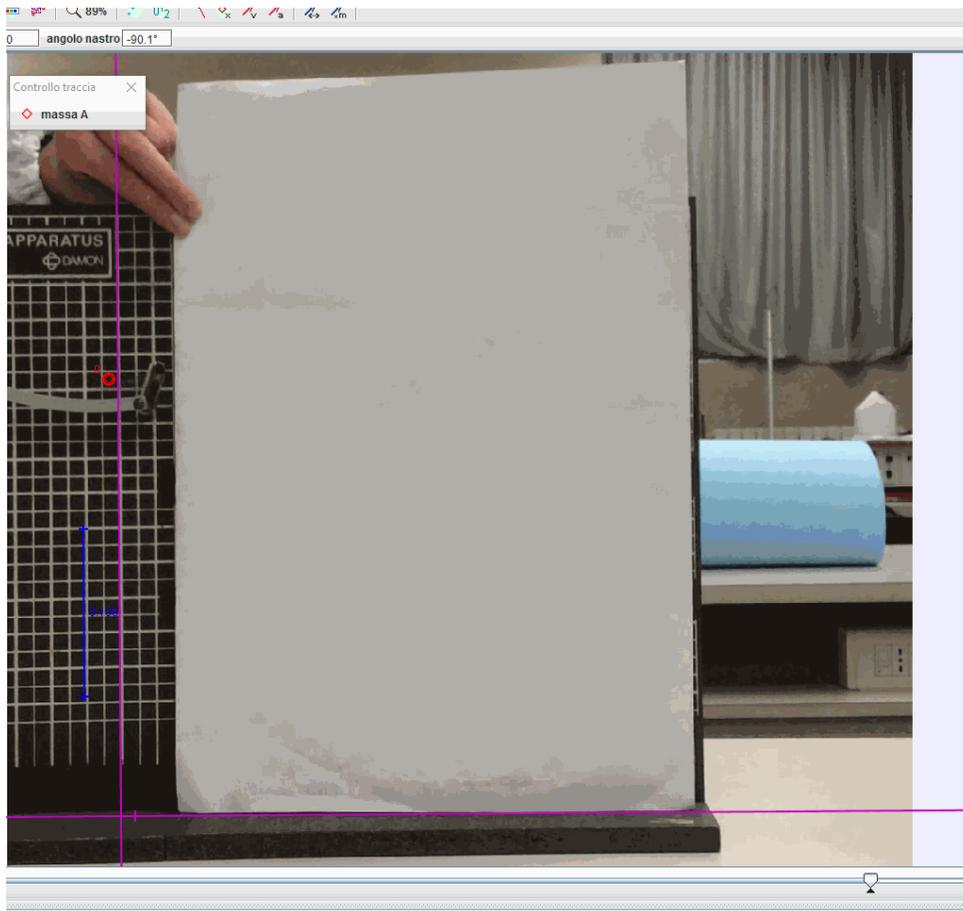
Avvertenze

- Osservare sempre con gli studenti il fenomeno reale prima di lavorare con le immagini
- Acquisire le immagini con gli studenti
- I risultati possono essere difformi a seconda dello smartphone utilizzato e delle impostazioni della videocamera



La qualità del video è un aspetto importante per il lavoro con Tracker. Occorre conoscere almeno alcune basi sulla fotografia e la ripresa di video.

Esempio di video problematico:



$$g = 8.9 \text{ m/s}^2$$



Note positive

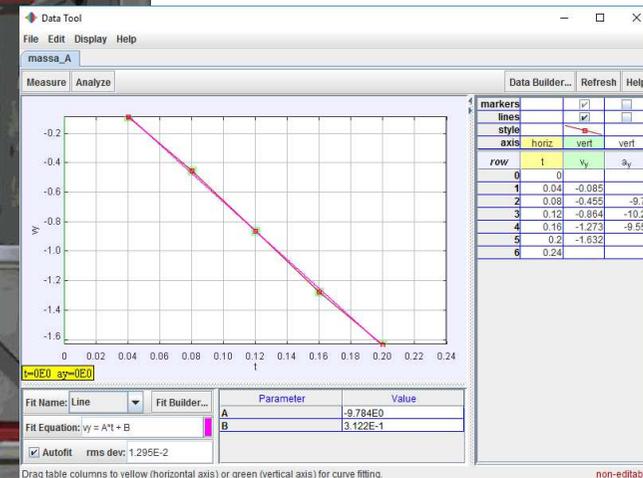
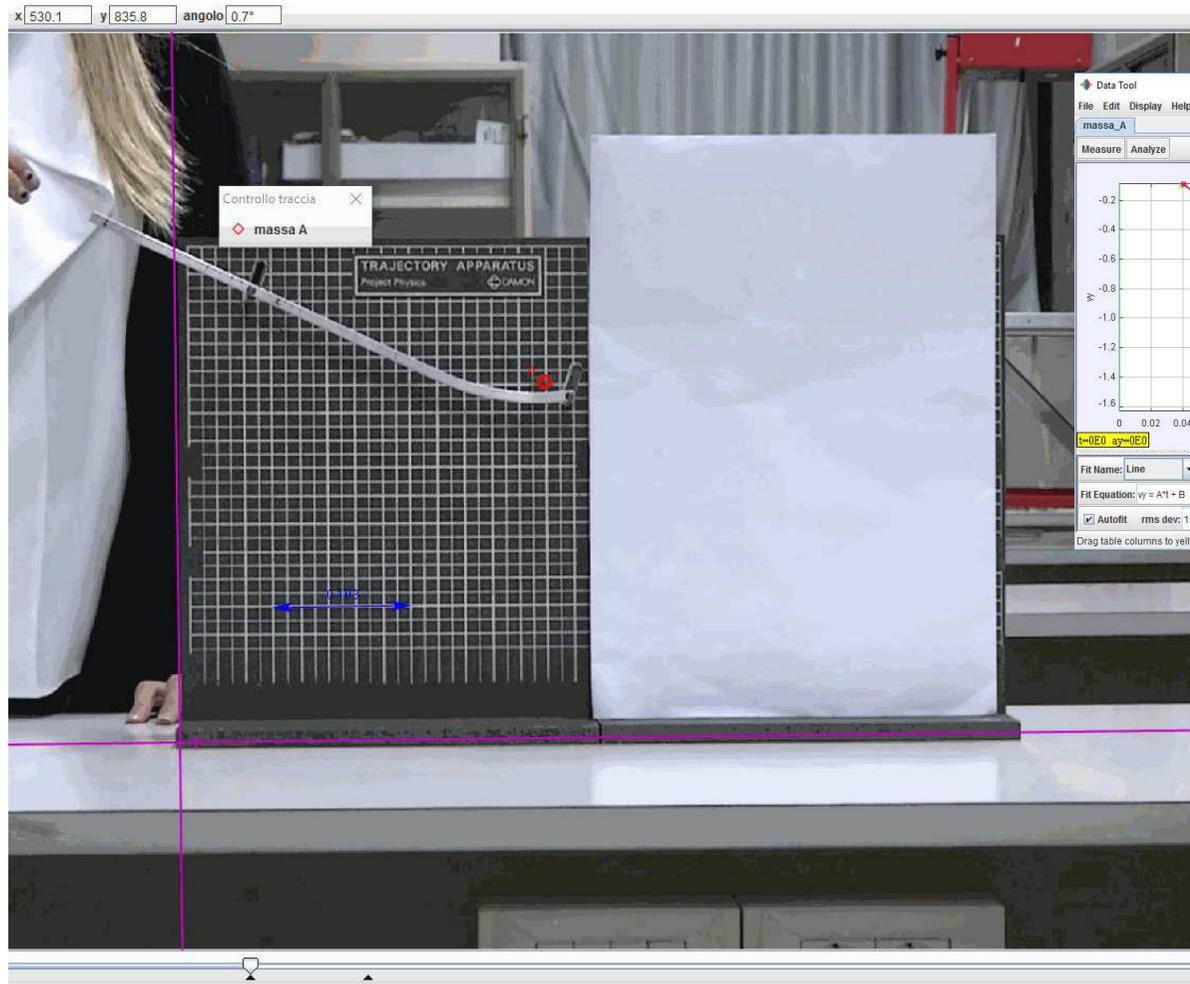
- La messa a fuoco è costante e il video è ben stabilizzato
- L'autore ha avuto cura di inserire un foglio bianco per aumentare il contrasto della pallina con lo sfondo, al fine di facilitare il tracciamento.

Problemi

- Le "scie" dei fotogrammi sono molto estese, il che rende difficile e arbitrario il tracciamento (il tempo di esposizione di ciascun fotogramma è troppo elevato).
- Il numero di fotogrammi al secondo potrebbe essere troppo basso per studiare adeguatamente il fenomeno considerato.



Ridotto tempo di esposizione, sempre 30 fps:



$g = 9.8 \text{ m/s}^2$ (forse per caso, difficile stimare l'errore)



- Alcuni smartphone (generalmente di fascia alta) consentono un controllo manuale completo della video camera. In molti altri casi si possono usare accorgimenti e "trucchi".
- Per ridurre il tempo di esposizione dei fotogrammi si può aumentare la sensibilità alla luce, aumentando gli ISO. In questo modo la videocamera è costretta, in automatico, a diminuire il tempo di esposizione.
- L'operazione è possibile nella maggioranza degli smartphone; o dal software preinstallato, oppure installando l'app OpenCamera.
- OpenCamera è anche utile per "bloccare" la messa a fuoco, che in alcuni casi può variare durante il video, cambiandone la scala.
- Un altro fattore cui si può fare attenzione è il sistema di stabilizzazione dell'immagine. Sistemi di stabilizzazione "ottica" (o "hardware") danno risultati migliori di sistemi di stabilizzazione "digitale" (o "software"). La cosa migliore è comunque tenere lo smartphone su un supporto fisso durante il video.



Video a 240 fps (iPhone):

TRAJECTORY APPARATUS
Project Physics
PARATUS
GEMICH

Controllo traccia
massa A

0.100

Data Tool
File Edit Display Help
massa_A
Measure Analyze
Data Builder... Refresh Help

markers
lines
style
axis horiz vert vert

row	t	y ₀	x
0	0	0	-0.012
1	0.004	0.109	-0.006
2	0.008	-0.055	-0
3	0.012	-0.109	0.005
4	0.017	-0.055	0.013
5	0.021	-0.164	0.018
6	0.025	-0.273	0.023
7	0.029	-0.273	0.03
8	0.033	-0.327	0.036
9	0.038	-0.327	0.042
10	0.042	-0.327	0.047
11	0.046	-0.382	0.054
12	0.05	-0.436	0.059
13	0.054	-0.491	0.065
14	0.058	-0.545	0.071
15	0.063	-0.545	0.076
16	0.067	-0.6	0.083
17	0.071	-0.709	0.089
18	0.075	-0.655	0.095
19	0.079	-0.764	0.1
20	0.083	-0.817	0.106
21	0.088	-0.863	0.112
22	0.092	-0.884	0.117

Fit Name: Line
Fit Builder...
Fit Equation: $y = A^*t + B$
Autofit rms dev: 3.955E-2

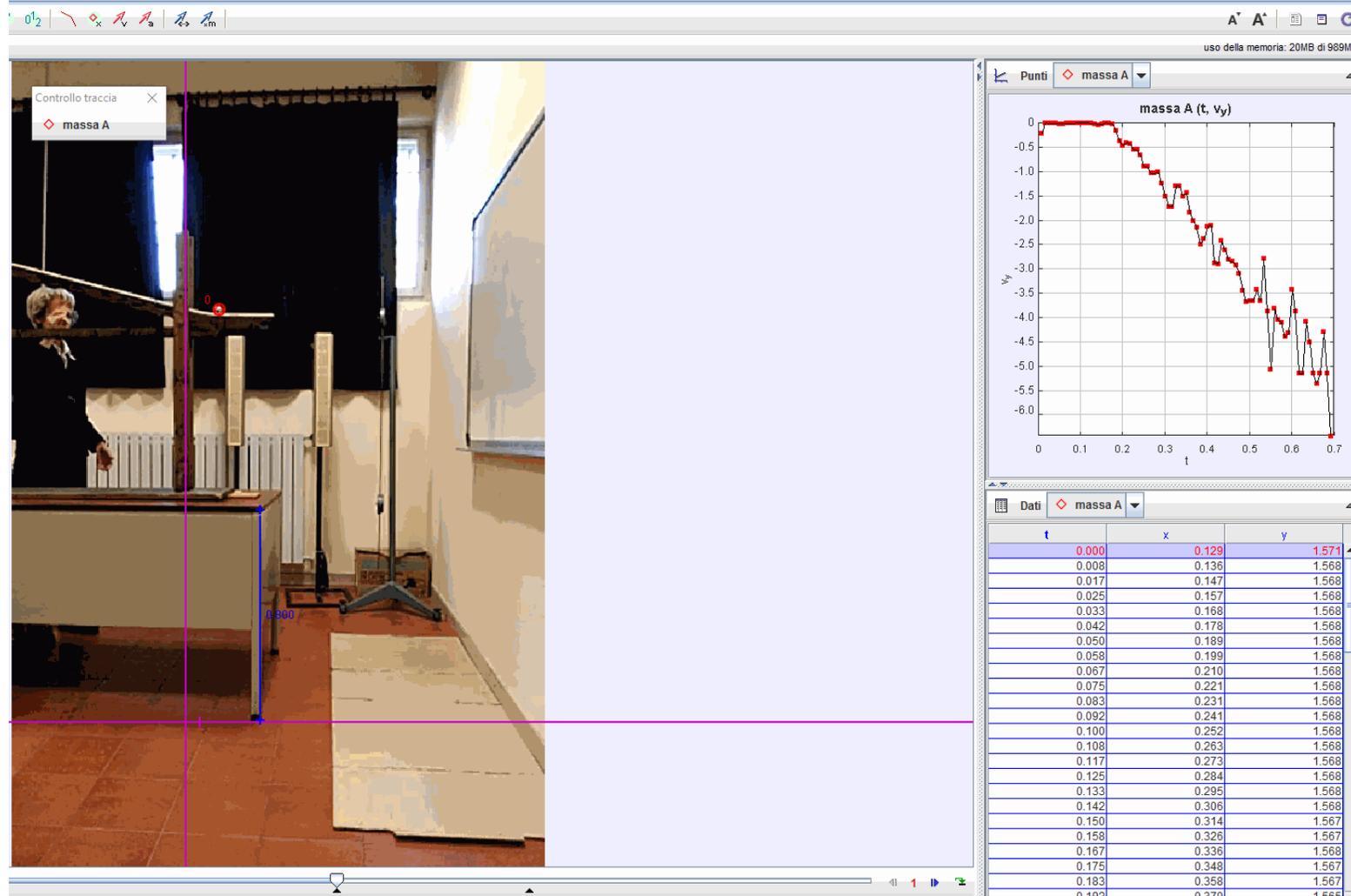
Parameter	Value
A	-9.878E0
B	3.696E-2

Drag table columns to yellow (horizontal axis) or green (vertical axis) for curve fitting. non-editable

$g = 9.4 \pm 0.5 \text{ m/s}^2$ (si può stimare l'errore facendo il fit con diverse selezioni)



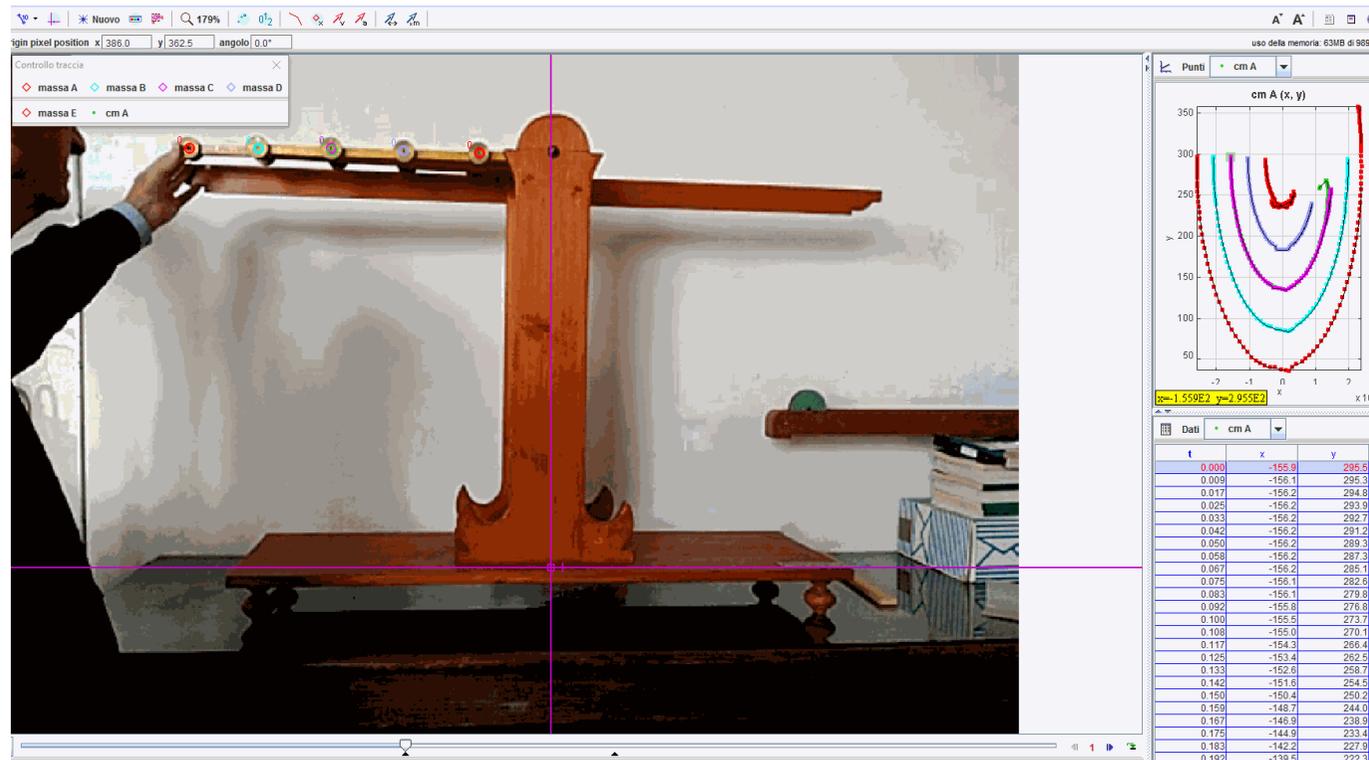
Video a 120 fps (BQ Aquaris M5):



Scelta dello smartphone e impostazioni della video camera



- Videocamere ad alto frame rate (caratteristica spesso indicata come "slow motion") sono per il momento disponibili in smartphone di fascia medio-alta o superiore.
- iPhone 6, Samsung Galaxy S7, Huawei Nexus 6P: 240 fps
- Molti modelli (approssimativamente dai 200 € in su): 120 fps





...adesso acquisite i vostri video

- Se il vostro smartphone dispone di "slow motion", attivatelo.
- Appoggiatevi su una superficie rigida, o comunque tenete lo smartphone molto fermo.
- Per il tempo di esposizione, proviamo prima con le impostazioni automatiche dando alla stanza una buona illuminazione, e correggiamo eventualmente poi l'impostazione degli ISO.



Estendere la memoria di lavoro

Dimensione memoria

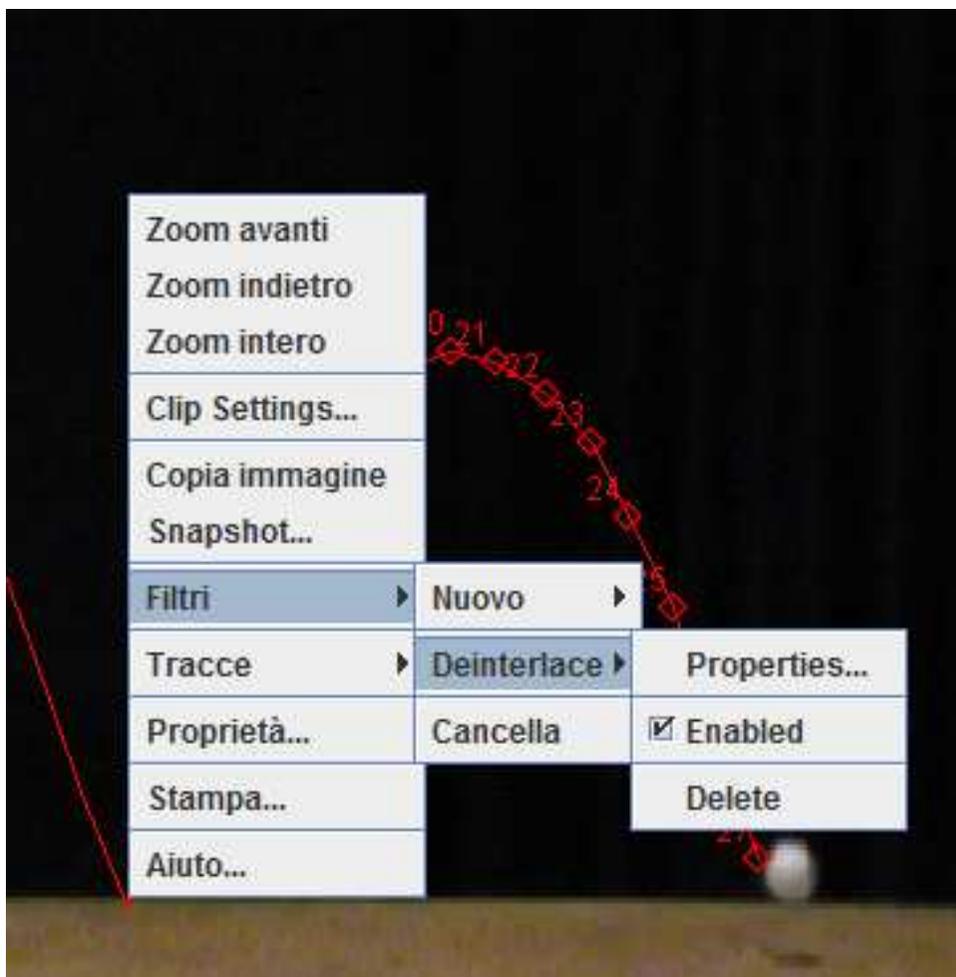
Usa i predefiniti 1.400 MB

t	x	y
0	-0,658	-0,041
0,04	-0,612	0,036
0,08	-0,563	0,084
0,12	-0,518	0,122
0,16	-0,473	0,141
0,2	-0,428	0,141
0,24	-0,39	0,126
0,28	-0,339	0,092
0,32	-0,297	0,045
0,36	-0,256	-0,022
0,4	-0,215	-0,102
0,44	-0,178	-0,198
0,48	-0,14	-0,311
0,52	-0,103	-0,404

Dare a Tracker circa 1 Gb di memoria e riavviare



Eventualmente deinterlacciare il video: tasto destro/filtri

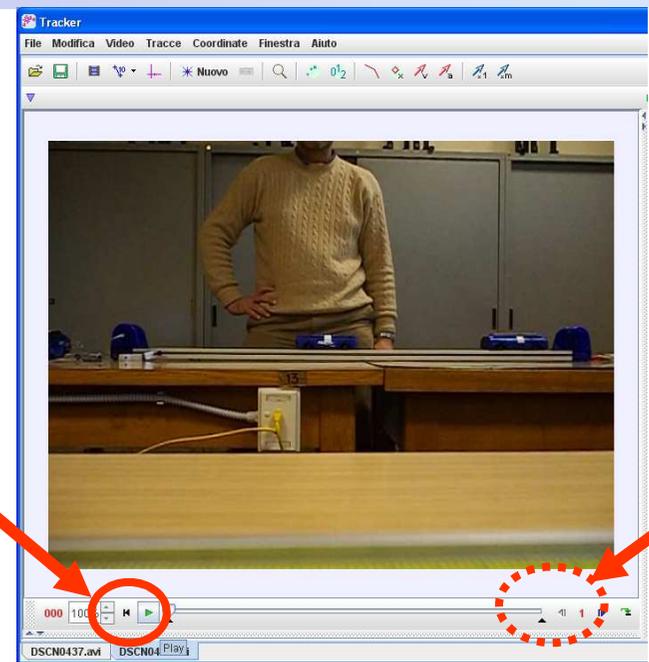


Necessario per video con hardware meno recente, standard in via di estinzione. Da applicare a Moto Pallina Ping Pong

Nel menu "filtri" anche il comando per ruotare i video (utile per video realizzati con smartphone)

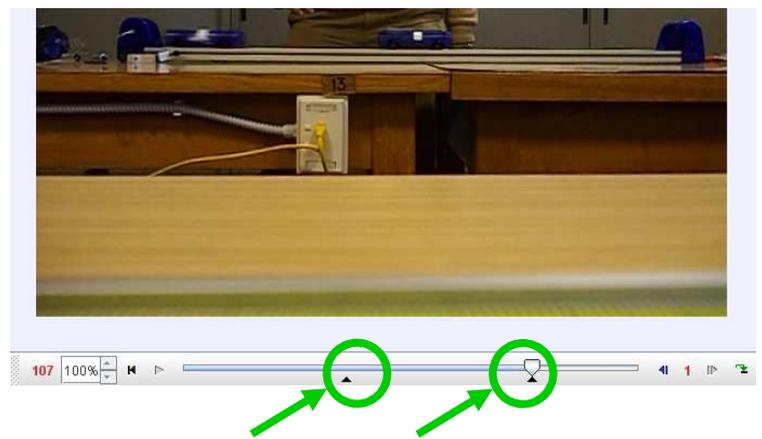
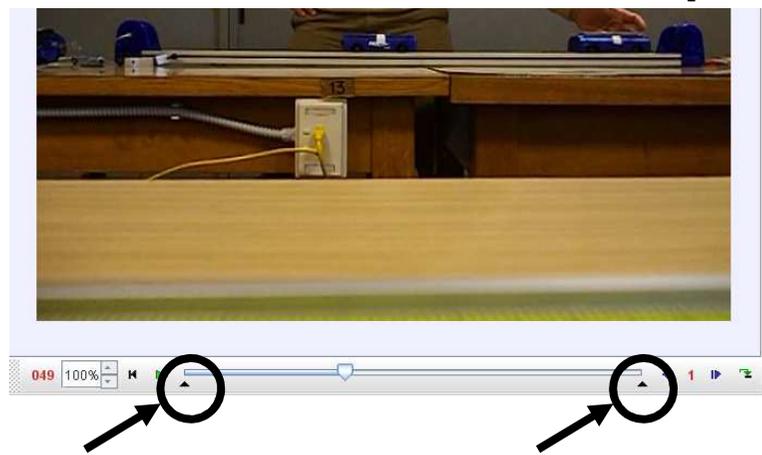


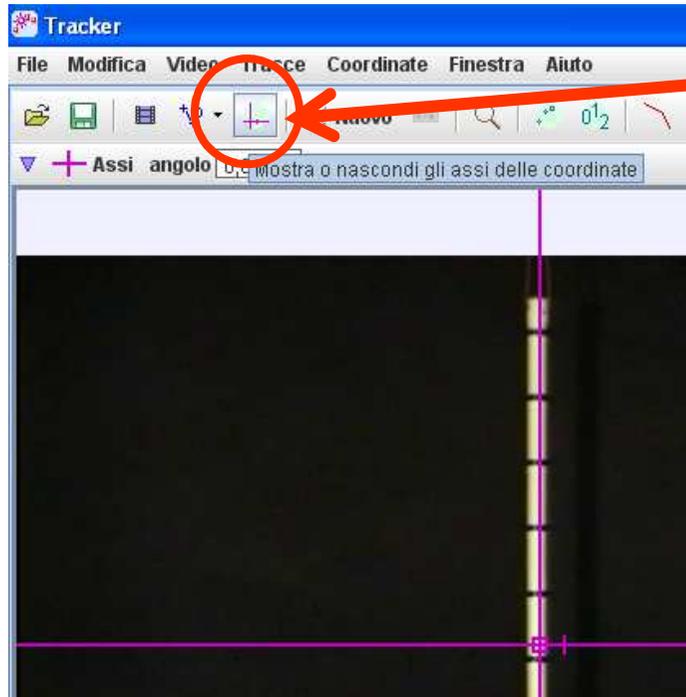
Visualizzare l'intero video



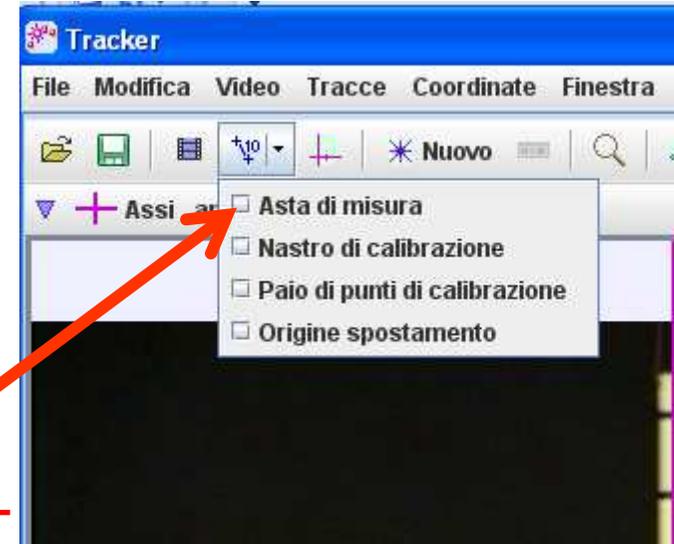
Frame x Frame

Selezionare l'intervallo di tempo in cui avviene il fenomeno



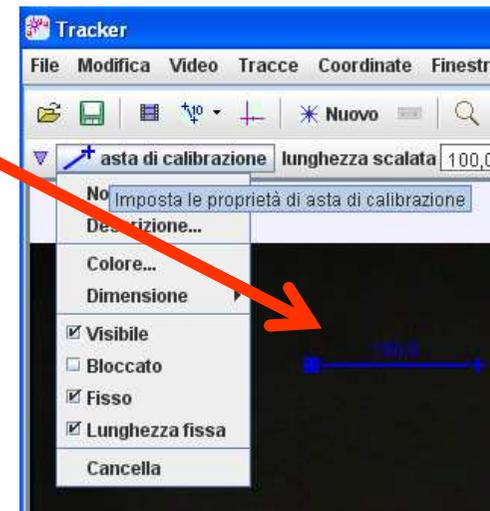


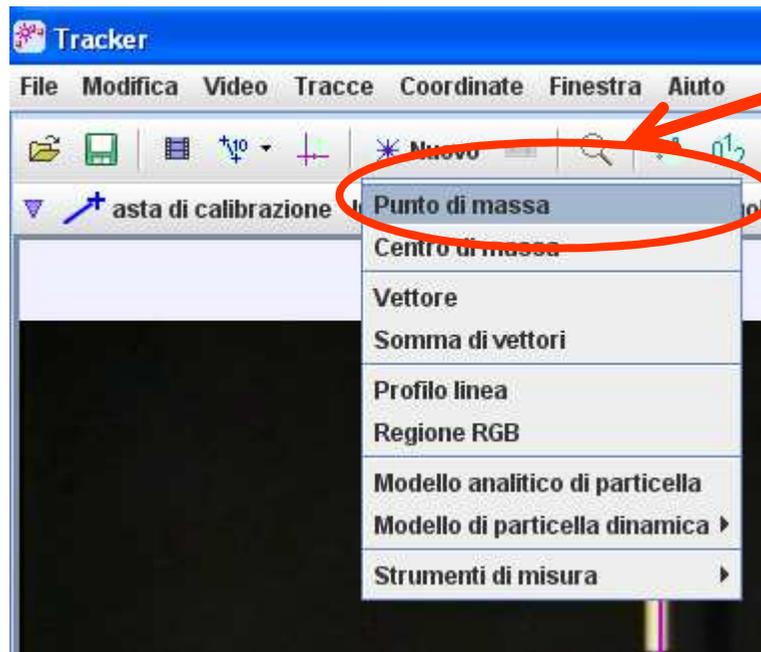
Impostazione assi



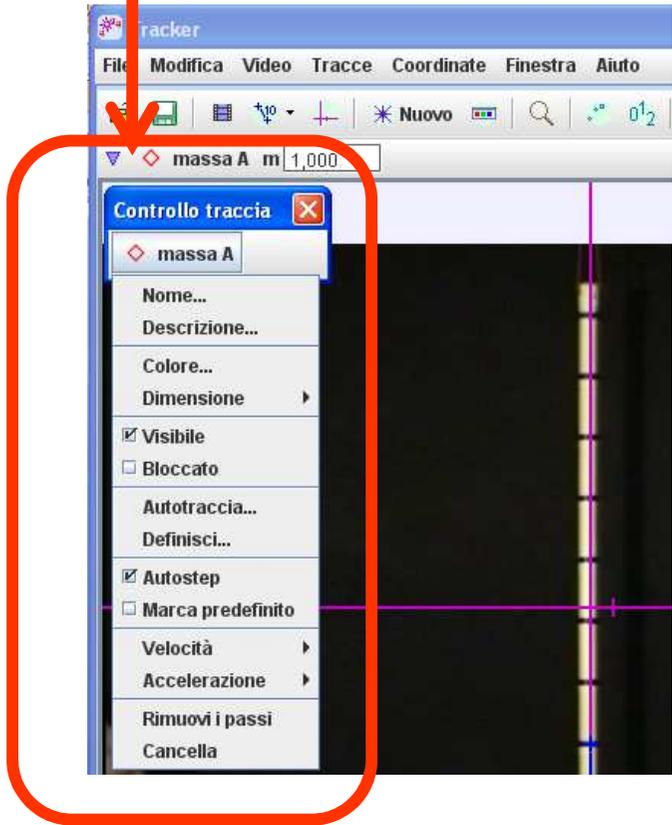
Unità misura –
ASTA DI
MISURA

Ricordare di includere nel video un riferimento per la scala delle lunghezze.



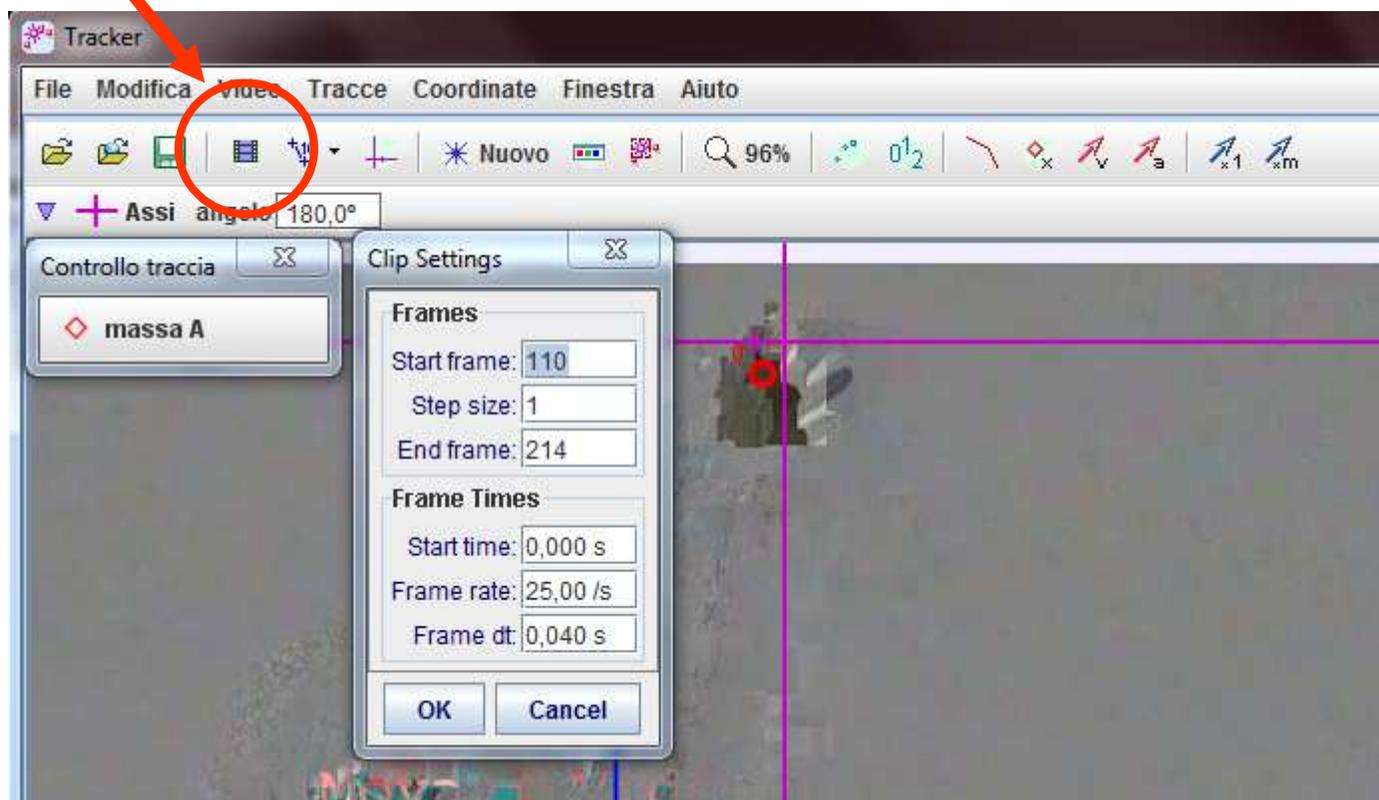


Punto di massa





Rate di acquisizione e adattamento



Non sempre Tracker individua correttamente il frame rate del video, può essere necessario impostarlo manualmente.



Shift-Click per prendere il punto lungo la traccia

Traccia manuale

Autotraccia

Shift-Ctrl-Click per prendere il punto lungo la traccia

Autotracker: Pallina 2

Maschera immagine: Iniziale Quadro 18

1. Maschera 2. Obiettivo 3. Accetta 4. Cerca

Frequenza di evoluzione: 10%

La maschera definisce l'immagine da confrontare in ogni quadro video. Spostare o ridimensionare la maschera trascinandone rispettivamente il centro o l'appiglio.

Suggerimento: la maschera non necessita di essere larga né di includere l'intero oggetto. Un particolare che sia unico e che abbia bordi ad elevato contrasto è generalmente una buona scelta.

Suggerimento: non è necessario che il modello sia grande né che includa completamente l'oggetto. In genere funziona bene un particolare univoco con bordi ben contrastati.

Aiuto Reimposta Indietro Prossimo Chiudi

Autotracker: Pallina 2

Maschera immagine: Iniziale Quadro 20

1. Maschera 2. Obiettivo 3. Accetta 4. Cerca

Cancelar questo punto Cancelar questo e tutti i punti successivi

Quadro 20 (punteggio riscontro 39,9): Il riscontro mostrato è stato automaticamente marcato alla posizione dell'obiettivo.

Aiuto Reimposta Indietro Prossimo Chiudi



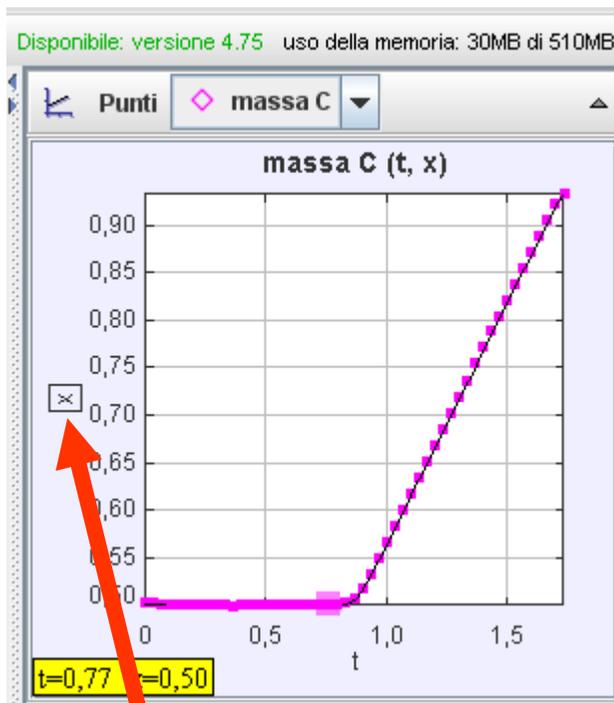
Misurare il valore di una variabile ad un dato istante

Nel riquadro dove è riportato il grafico con $v_x(t)$ fare click sul punto

Valore della misura: coppia $[t, v_x(t)]$

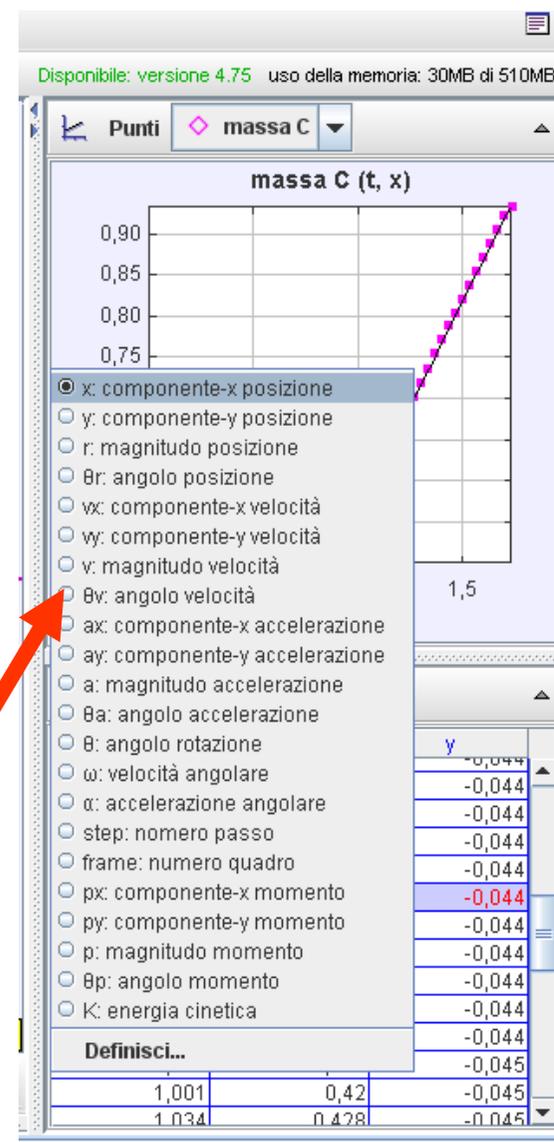


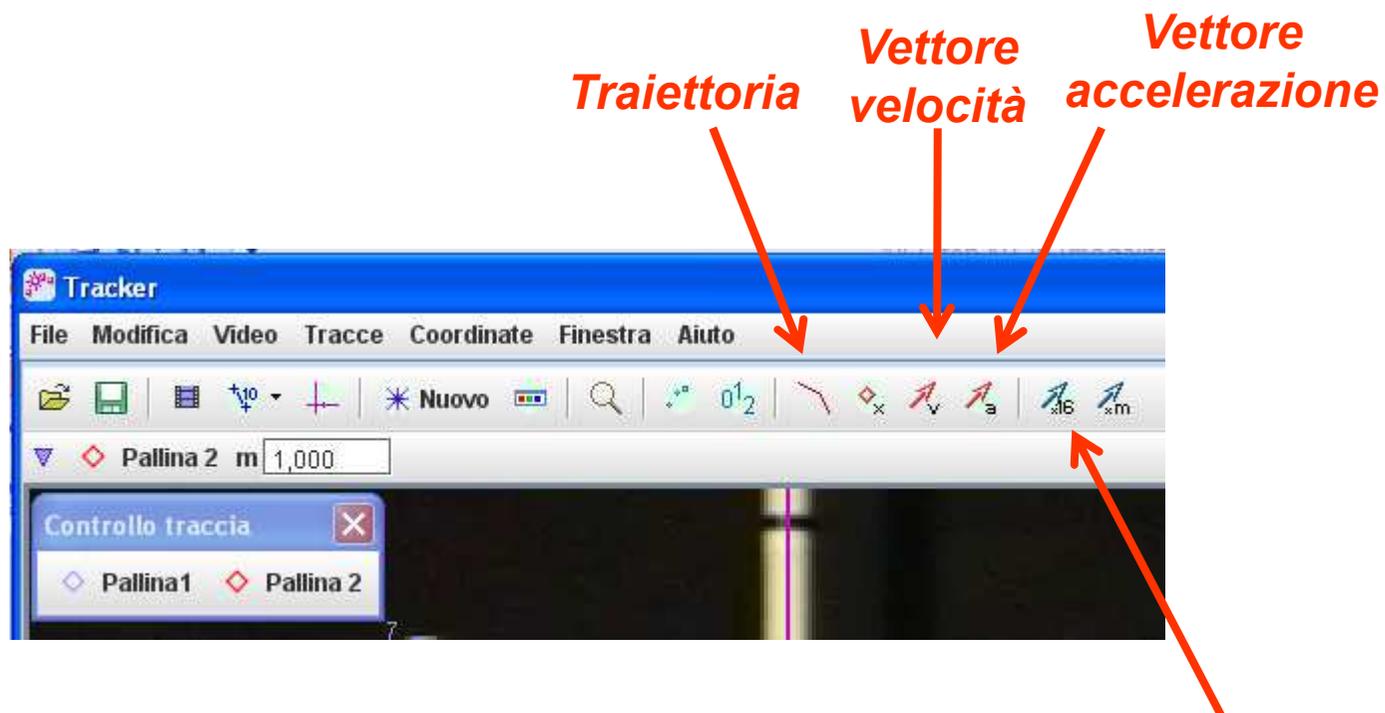
Cambiare le variabili nel grafico



**FARE CLICK
SULLA
VARIABILE**

**Scegliere la
nuova variabile
da visualizzare**





Tracker utilizza per il calcolo dell'accelerazione un algoritmo del second'ordine, per cui l'accelerazione indicata come "istantanea" dipende in realtà dalla velocità nei due frame precedenti e successivi. Questo causa problemi di interpretazione specie nei video con basso frame rate. Meglio quindi ricavare l'accelerazione dal fit delle velocità nella finestra Analisi Dati.

**Fattore
amplificazione
vettori**



Analisi Dati

Click con tasto destro su finestra grafico / analizza

The screenshot shows the Tracker software interface. The main window displays a video frame of a physics experiment with a red dot representing 'massa B'. A graph on the right shows the vertical position y versus time t for 'massa B'. The data table below the graph is as follows:

t	x
0	
0.033	
0.067	
0.1	
0.133	-8
0.167	-8
0.2	-8
0.233	-4
0.267	-88
0.3	-88,5
0.334	-89

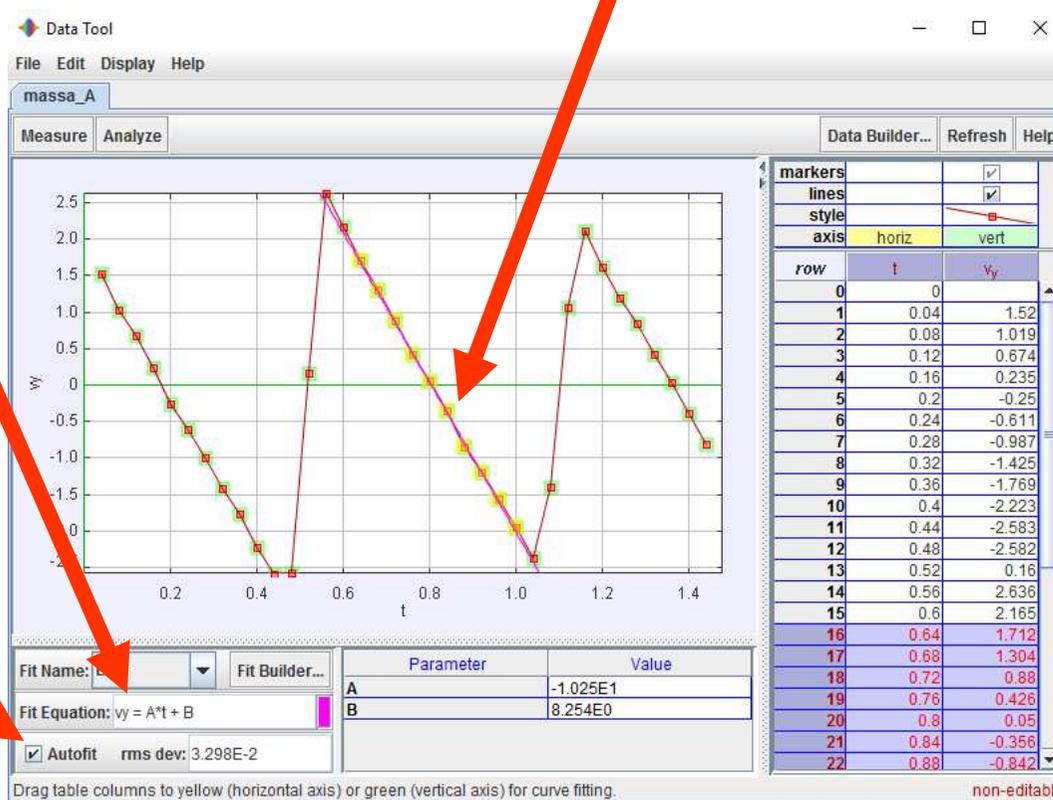
A context menu is open over the graph, with the 'Analizza' option circled in red. The menu options are: Zoom In, Zoom Out, Autoscale, Scale..., Puntini, Linee, Copia immagine, Snapshot..., **Analizza**, Algoritmi..., Stampa..., and Aiuto... The status bar at the bottom indicates 'DSCN0251.AVI'.



Definisci il fit

Seleziona punti

Autofit



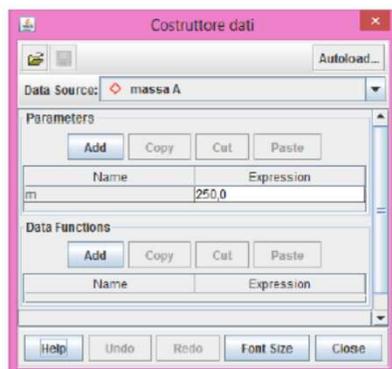


Figura 4.6: Costruttore dati

abs(x)	acos(x)	acosh(x)	asin(x)	asinh(x)	atan(x)
atanh(x)	atan2(x,y)	ceil(x)	cos(x)	cosh(x)	exp(x)
frac(x)	floor(x)	int(x)	log(x)	ln(x)	max(x,y)
min(x,y)	mod(x,y)	random(x)	round(x)	sign(x)	sin(x)
sinh(x)	sqr(x)	sqrt(x)	step(x)	tan(x)	tanh(x)

Tabella 4.1: Funzioni matematiche utilizzabili nel Costruttore dati

- **Slope.** Abilitando il comando Slope è possibile conoscere la pendenza del grafico in un punto facendo passare il cursore sui punti del grafico. Il valore della pendenza compare in un rettangolo giallo in basso a destra nella finestra in cui è mostrato il grafico.
- **Area.** Abilitando il comando Area è possibile conoscere l'area delimitata dal grafico e dall'asse delle ascisse. Per ottenere il valore dell'area, mostrato in un rettangolo giallo in basso a destra nella finestra in cui è mostrato il grafico, si deve cliccare su due rette verticali che compaiono nella finestra del grafico e trascinarle per impostare le estremità dell'area desiderate.



Figura 4.9: Fit Builder

vengono impostati automaticamente dal software. Il Fit Builder ha la stessa struttura del Costruttore dati, visto in precedenza.

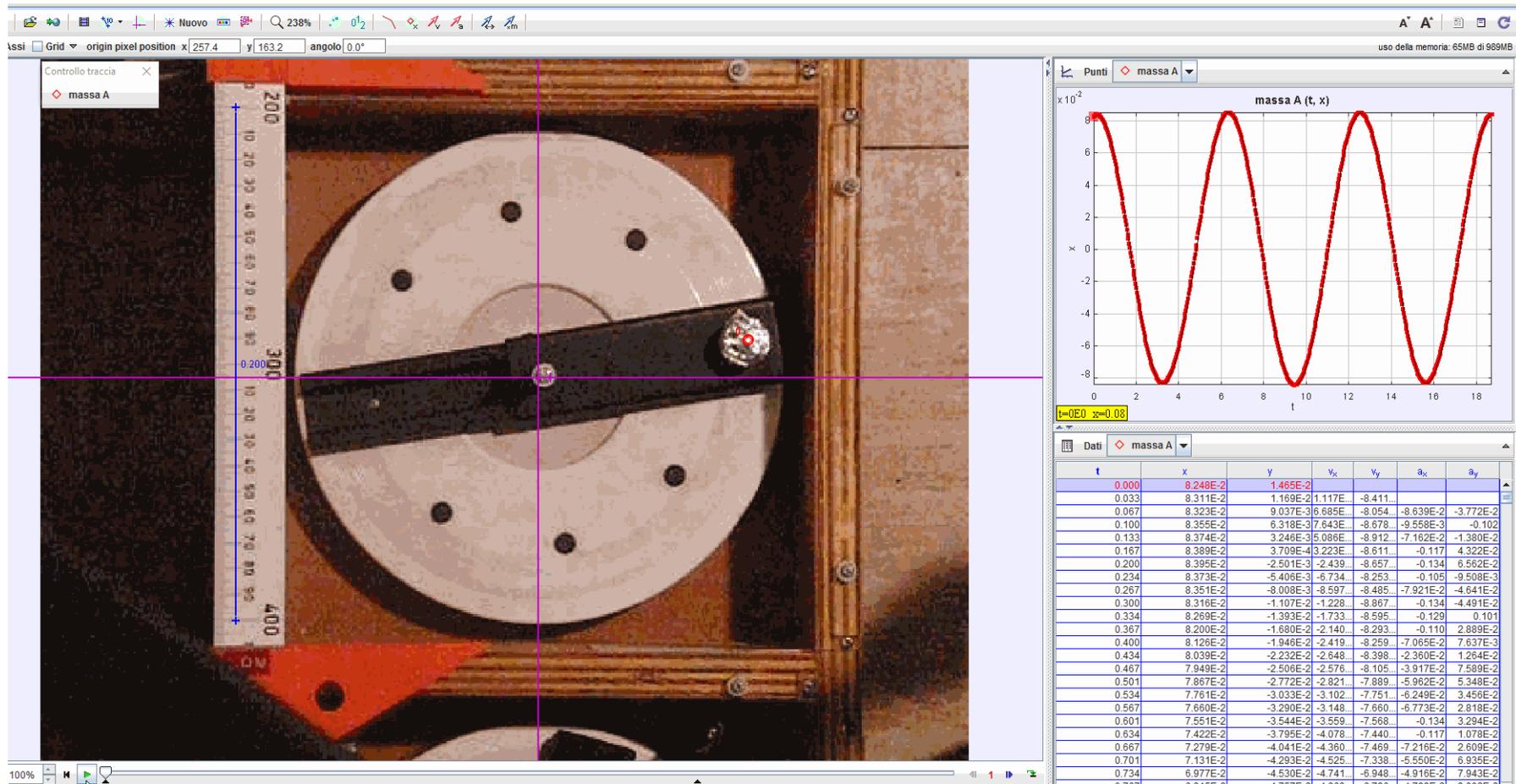
- **Fourier Spectrum.** Abilitando il comando Fourier Spectrum il software implementa una Fast Fourier Transformation (FFT) che viene mostrata in una finestra, Figura 4.10, che si apre appena l'implementazione è terminata. Lo spettro di frequenza mostra in ampiezza le componenti seno, coseno e/o potenza dell'insieme di dati.

Nel Data Tool è possibile, cliccando su **Help**, aprire un help on line che fornisce spiegazioni dettagliate per ogni suo elemento.

- **Statistics.** Abilitando il comando Statistics compaiono nella vista tabella i valori minimo e massimo, il valor medio, la deviazione standard, l'errore standard e il numero dei punti in totale della o delle tracce analizzate.
- **Curve Fits.** Abilitando il comando Curve Fits si apre lo strumento di analisi delle curve, inferiormente alla vista grafico. Cliccando su Fit Builder **Fit Builder...** si apre una finestra di dialogo, Figura 4.9, in cui è possibile definire i parametri e il tipo di curva, che in caso contrario

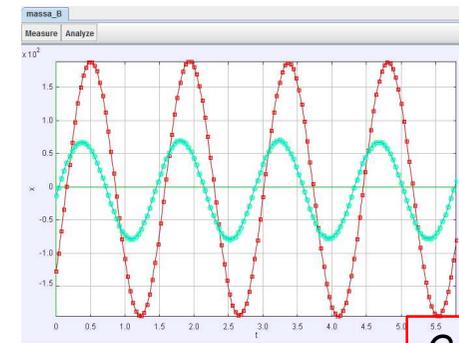
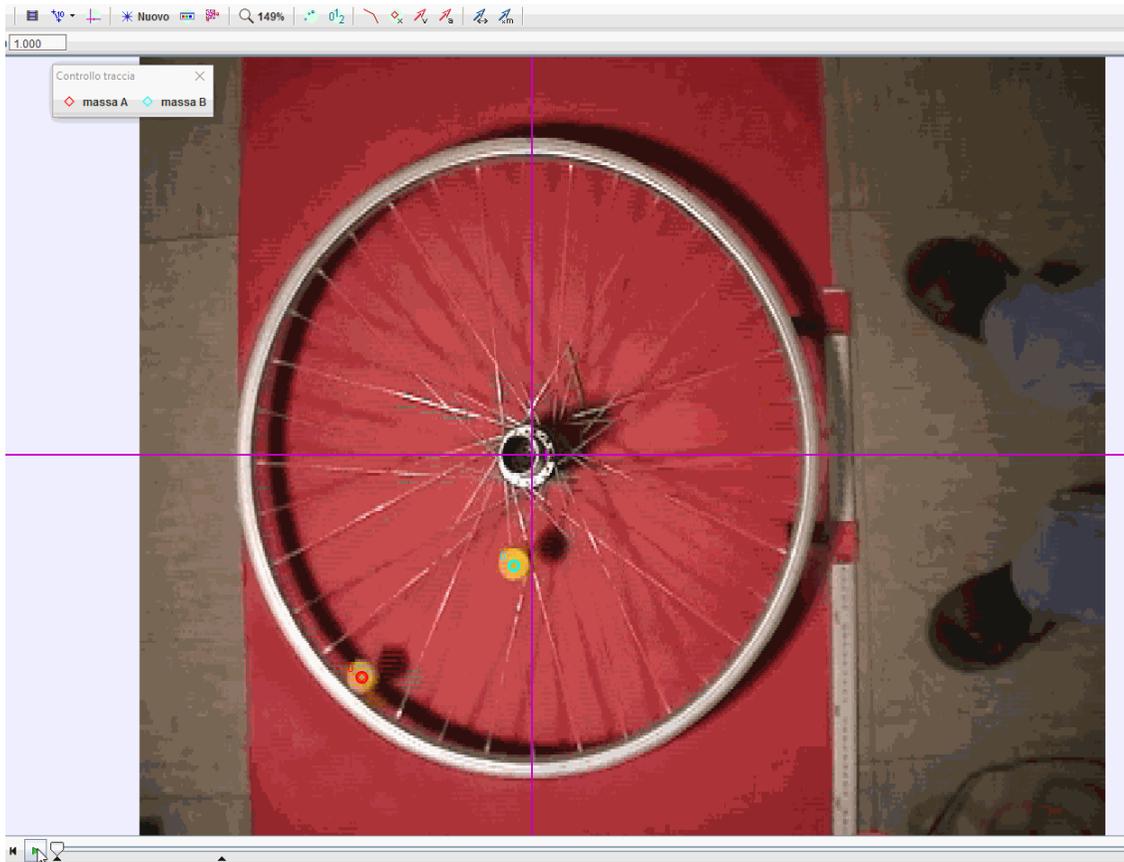


Moto circolare uniforme

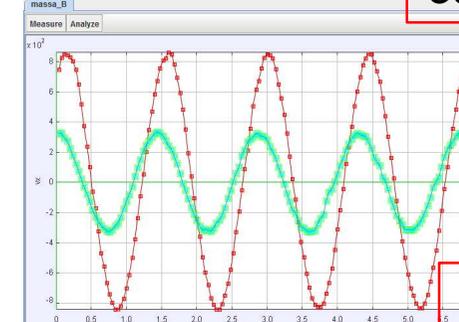




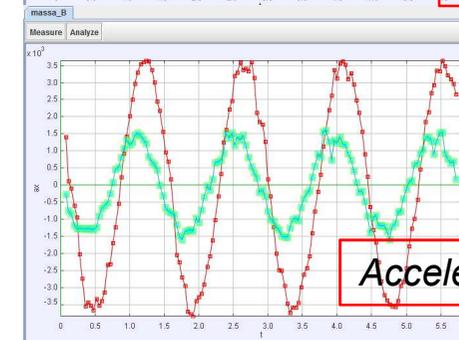
Moto circolare uniforme, confronto di punti



Coordinata x



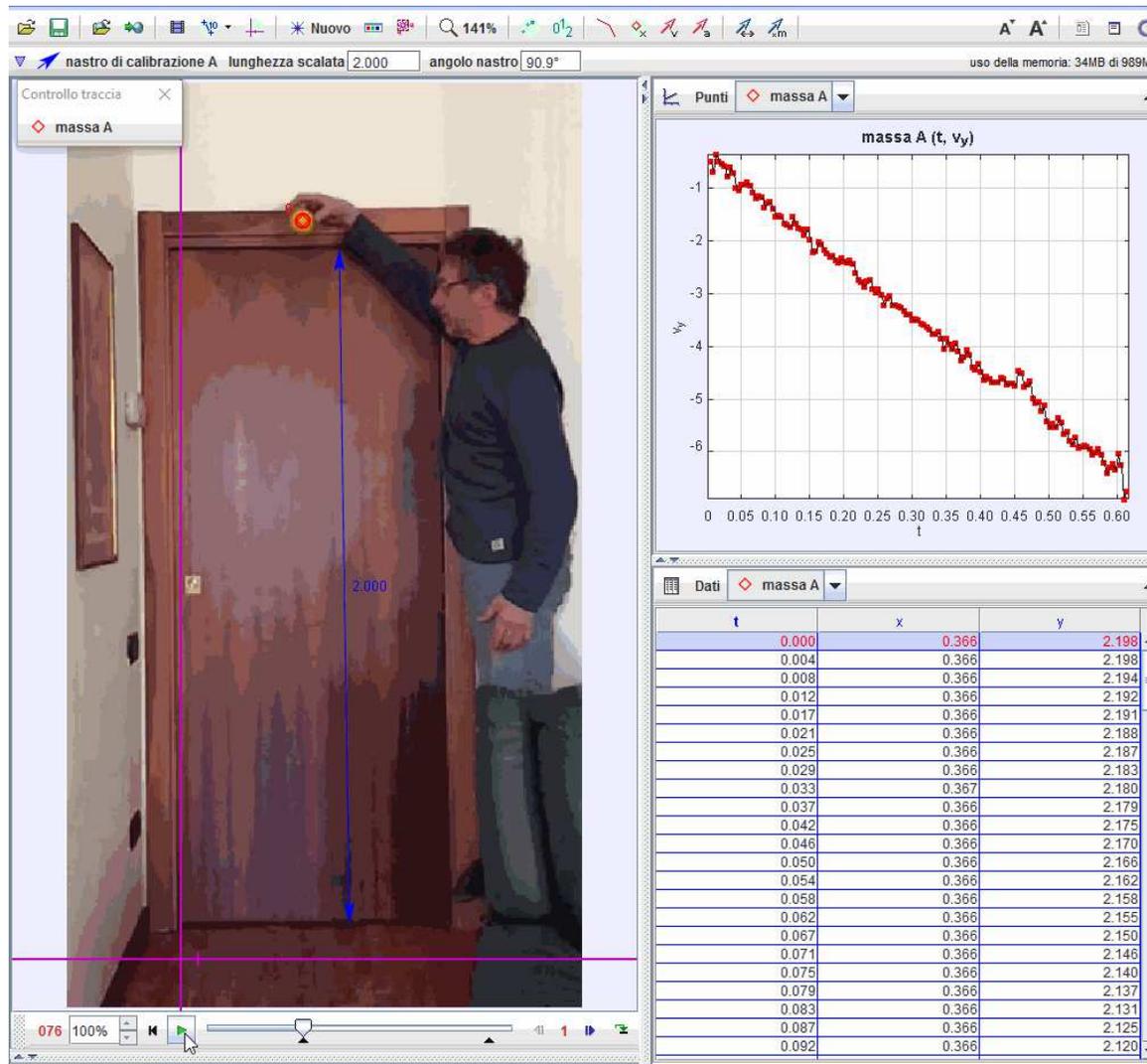
Velocità v_x



Accelerazione a_x



Caduta libera (iPhone 240 fps)





Indipendenza dei moti

Controlla traccia

- massa A
- massa B

Data Tool

File Edit Display Help

massa_B

Measure Analyze

Data Builder... Refresh Help

row	t	y	Y _{massaA}
0	0	200.093	201.161
1	0.033	190.951	193.33
2	0.067	185.798	186.059
3	0.1	171.116	170.957
4	0.133	155.326	153.639
5	0.167	133.931	132.911
6	0.2	108.621	105.503
7	0.233	80.504	78.645
8	0.267	47.923	44.536
9	0.3	17.601	17.107

Coordinata y

Data Tool

File Edit Display Help

massa_B

Measure Analyze

Data Builder... Refresh Help

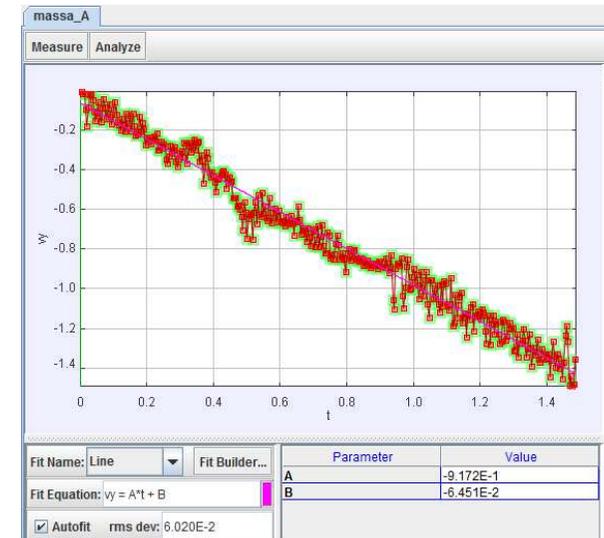
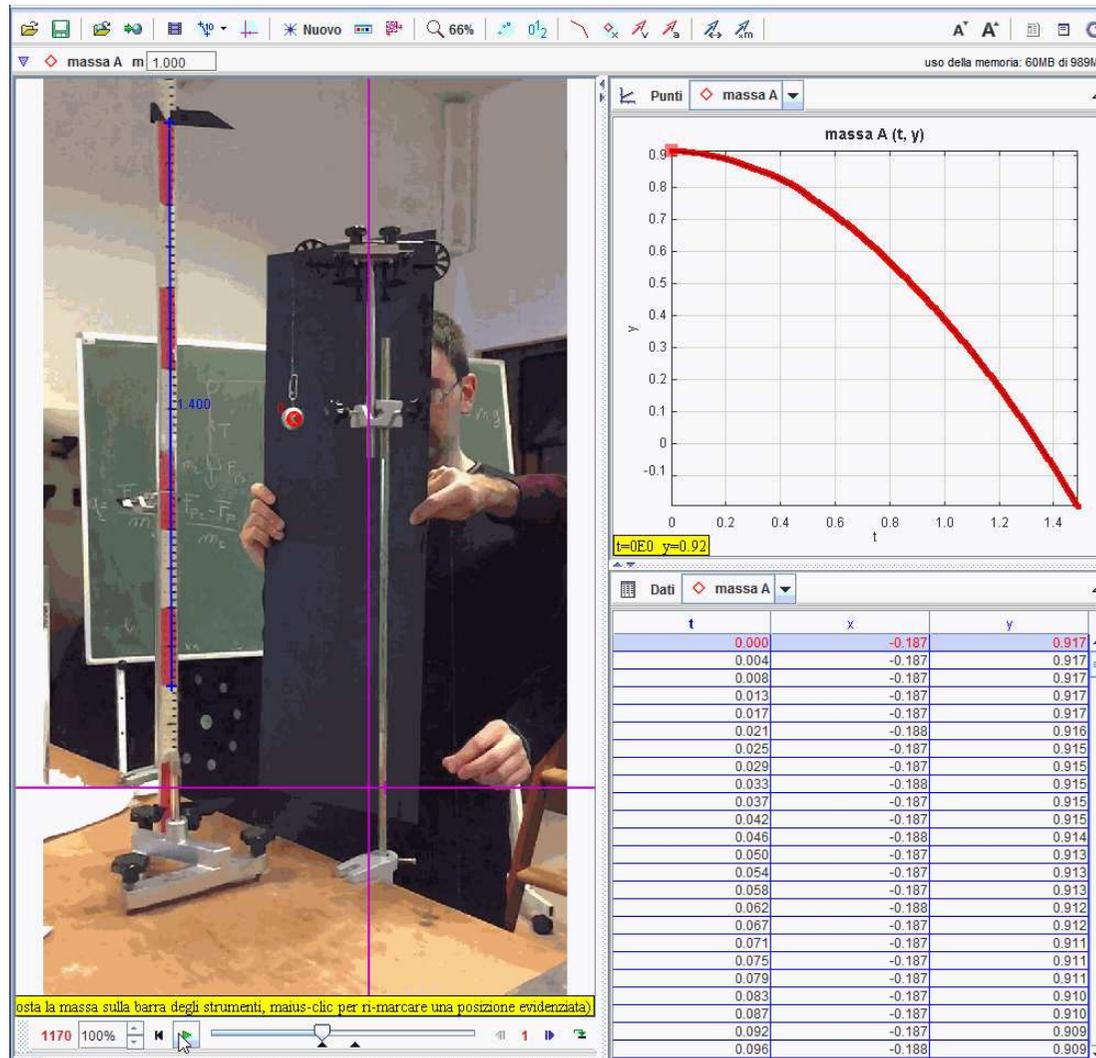
row	t	x	Y	massaA	X1
0	0	-40	200	201	-130
1	0.033	-50	190	193	-130
2	0.067	-56	185	186	-130
3	0.1	-63	171	170	-130
4	0.133	-70	155	153	-128
5	0.167	-76	133	132	-130
6	0.2	-83	108	105	-129
7	0.233	-91	80	78	-129
8	0.267	-97	47	44	-128
9	0.3	-103	17	17	-129

Coordinata x

Drag table columns to yellow (horizontal axis) or green (vertical axis) for curve fitting. non-editable



Macchina di Atwood (1)

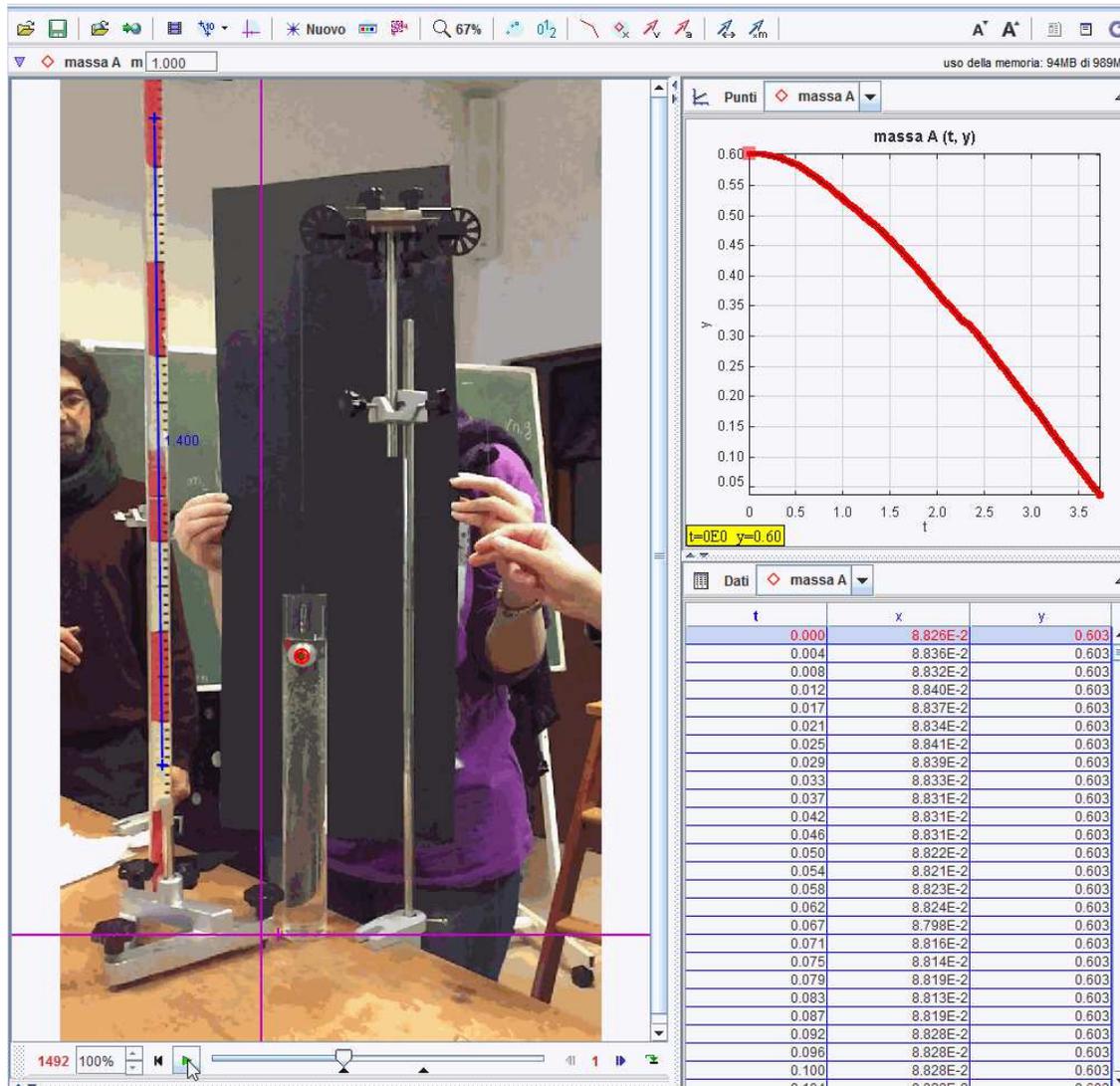


$$a = 1.00 \pm 0.08 \text{ m/s}^2$$

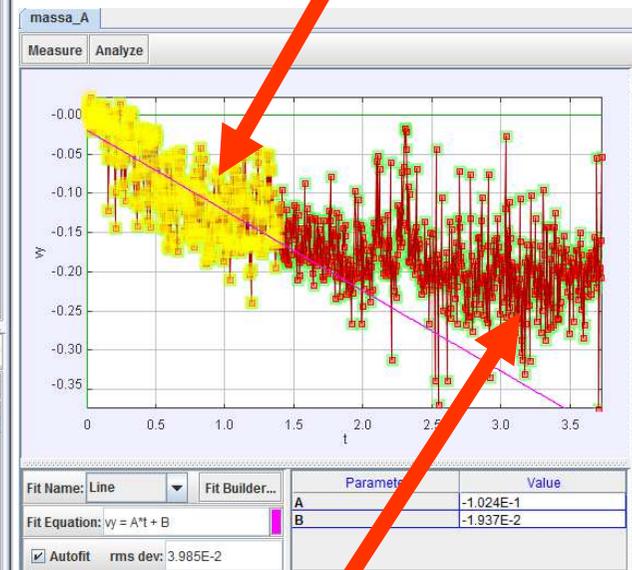
$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{g + a}{g - a}$$



Macchina di Atwood (2)



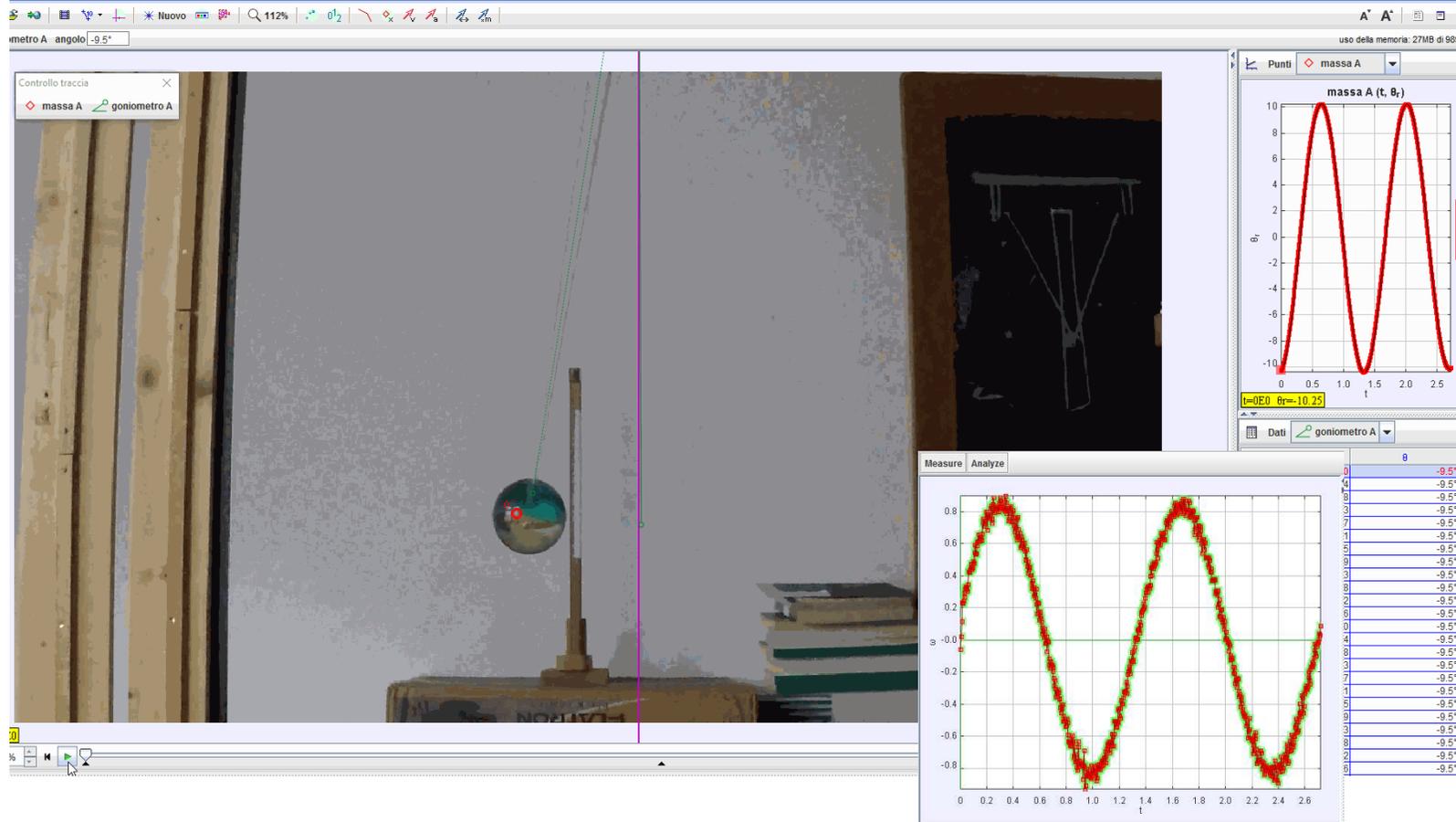
Zona di moto accelerato (forza di gravità, tensione del filo, forza di Archimede, attrito viscoso inizialmente trascurabile)



Zona di moto rettilineo uniforme (l'attrito viscoso aumenta e le forze si equilibrano)



Pendolo semplice



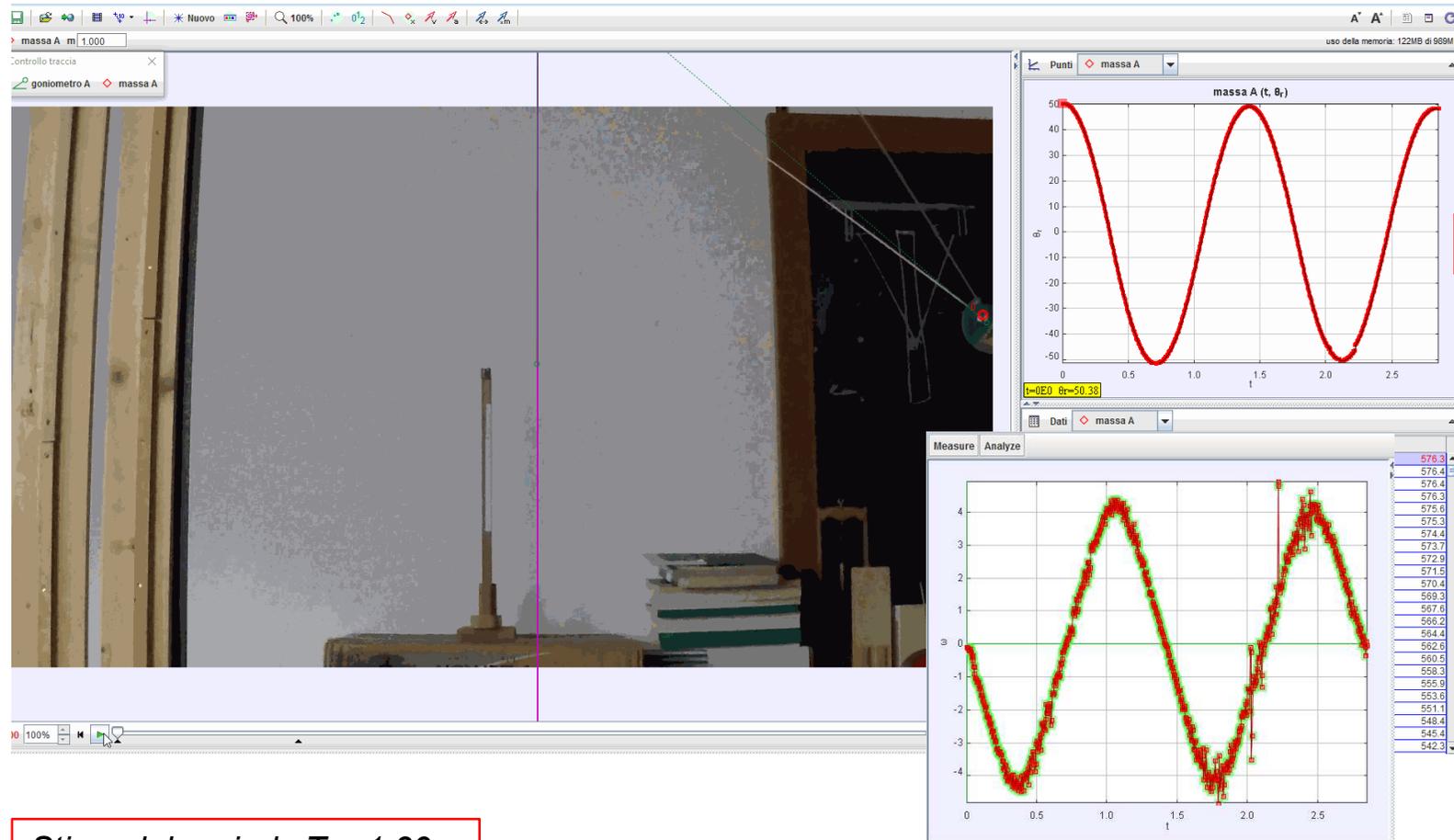
Angolo ϑ

Stima del periodo $T = 1.34 \text{ s}$

Velocità angolare ω



Pendolo semplice, grandi oscillazioni



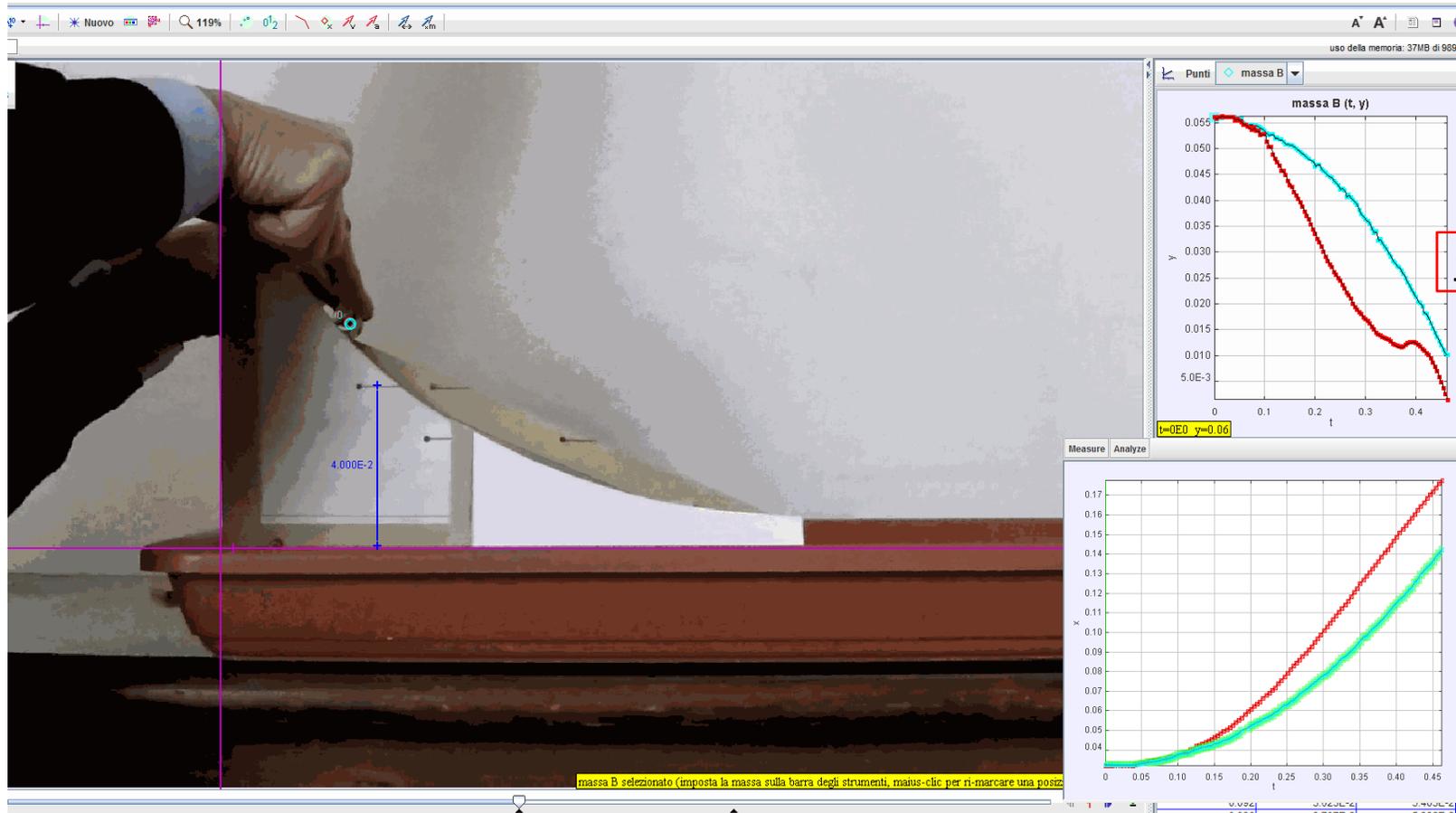
Angolo ϑ

Stima del periodo $T = 1.39$ s

Velocità angolare ω



Brachistocrona





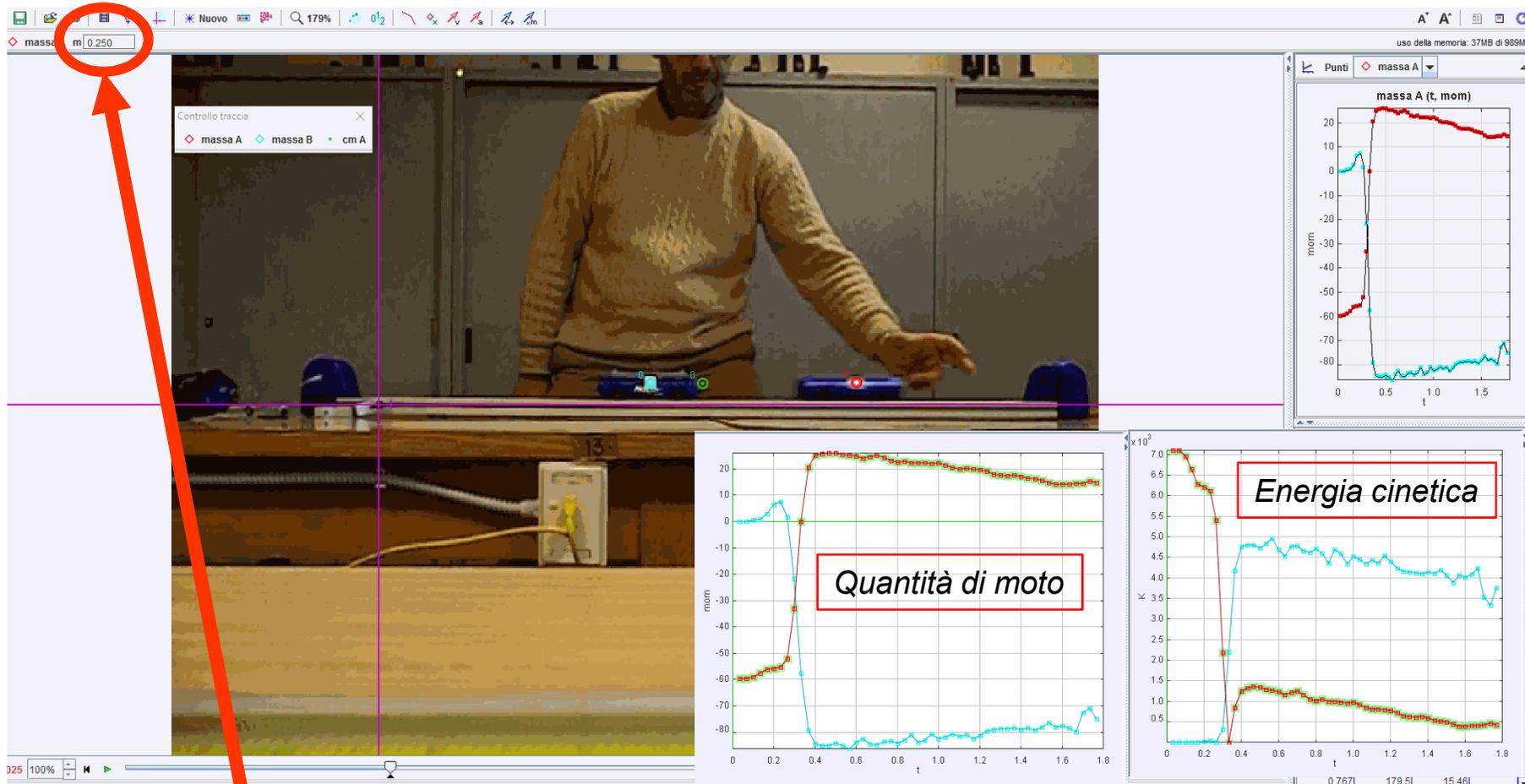
Urti in una dimensione, caso elastico, masse uguali



Dopo aver aggiunto e tracciato le due masse, cliccare nuovo/centro di massa e selezionare massa A e massa B.



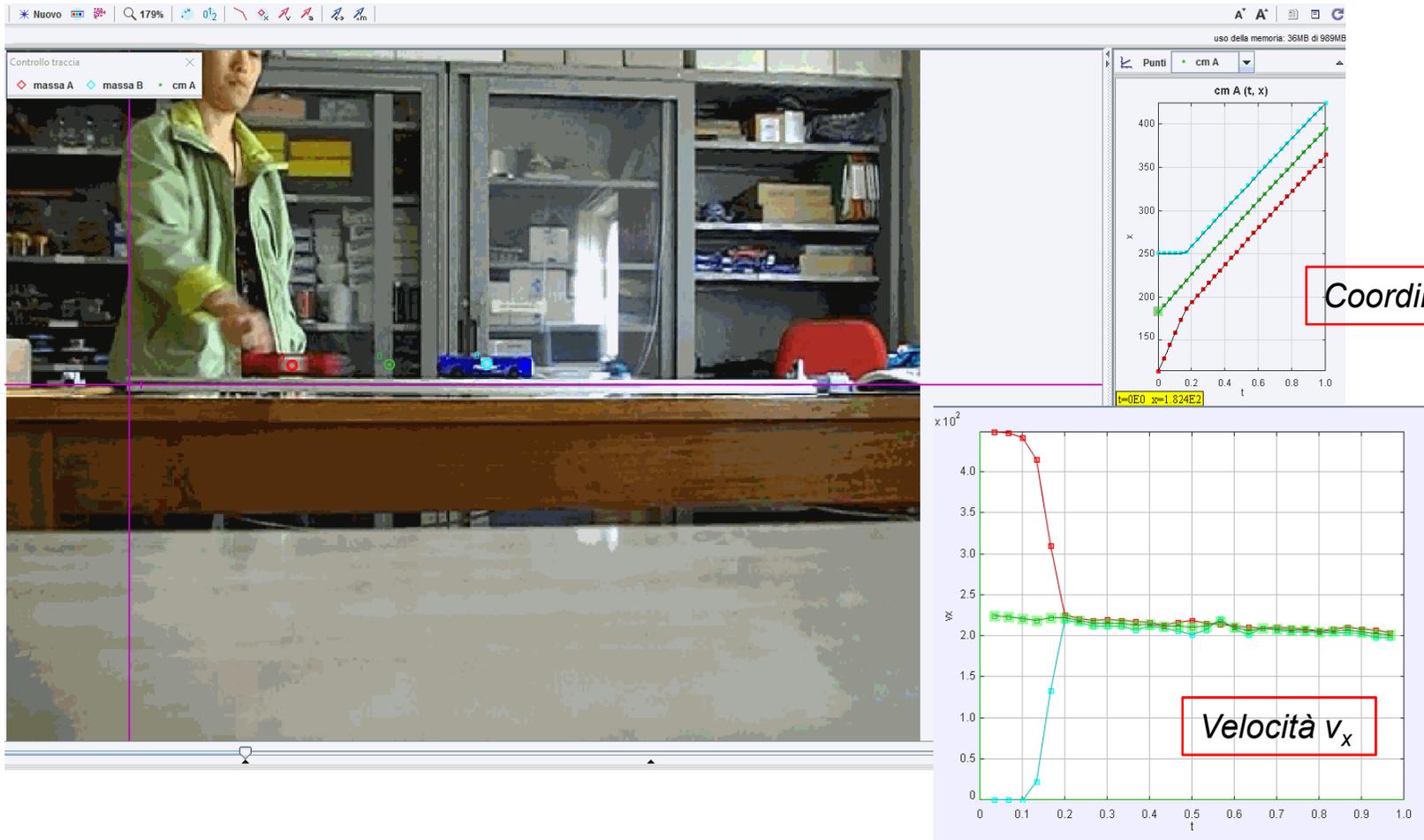
Urti in una dimensione, caso elastico, masse diverse



Inserire i valori delle due masse nelle input box

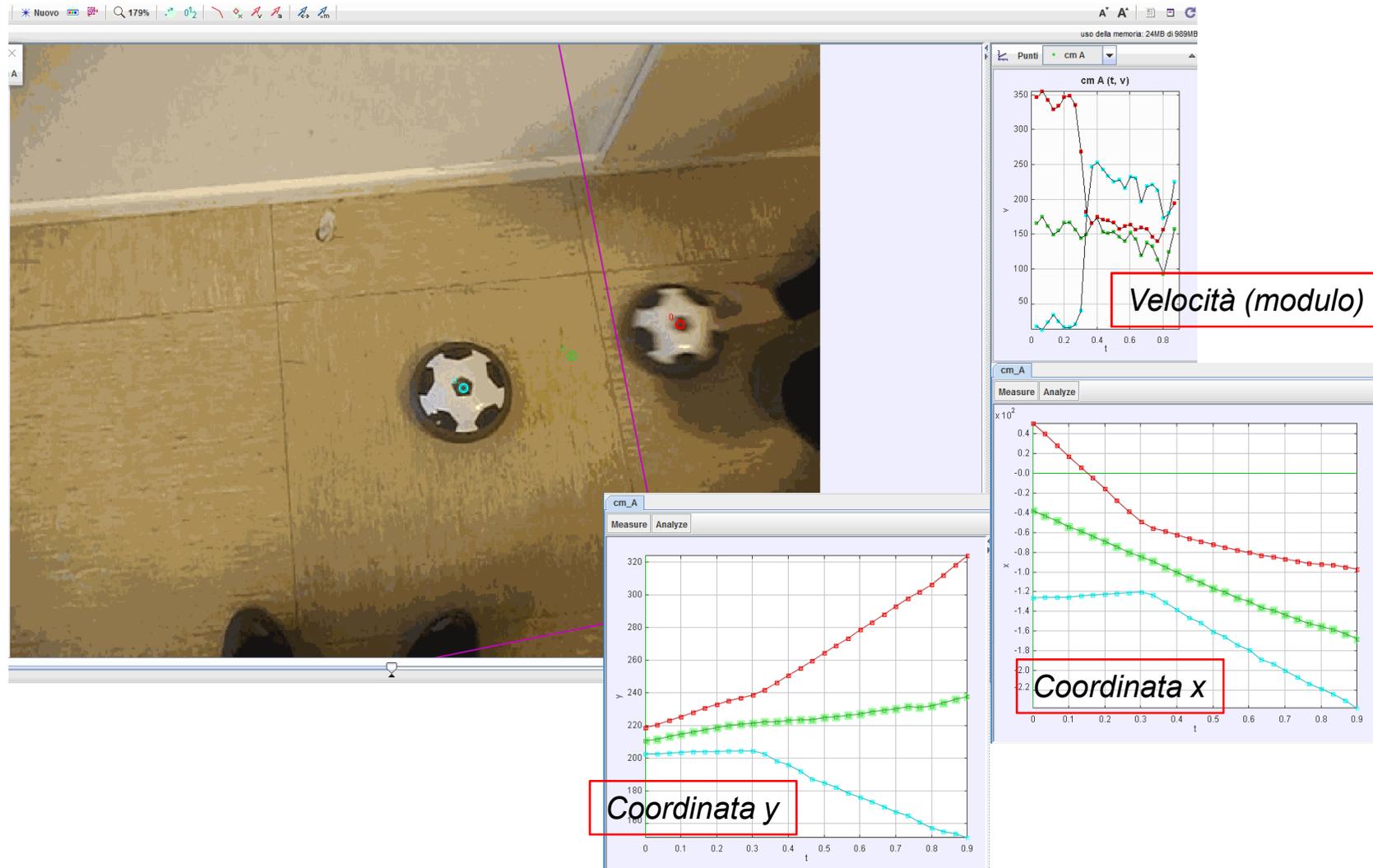


Urti in una dimensione, caso anelastico



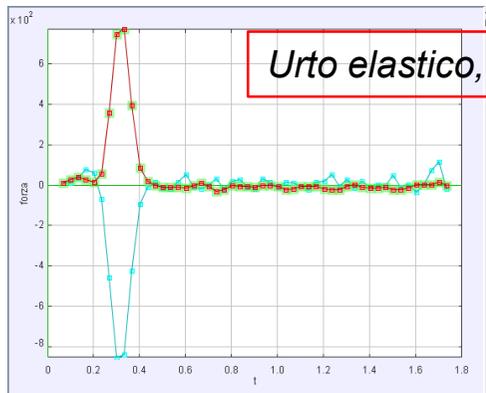


Urti elastici in due dimensioni



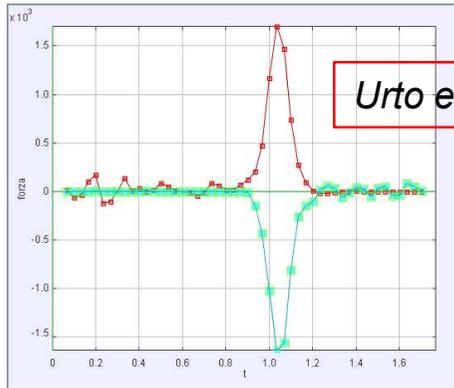


Terzo principio della dinamica

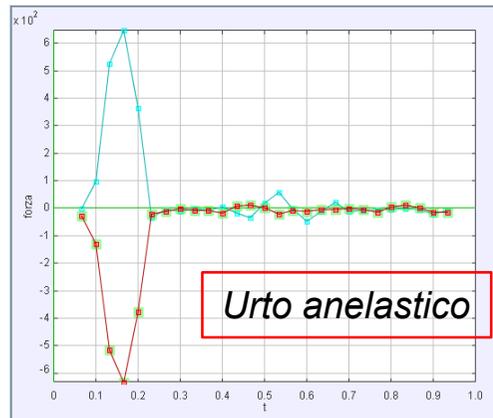


Urto elastico, masse uguali

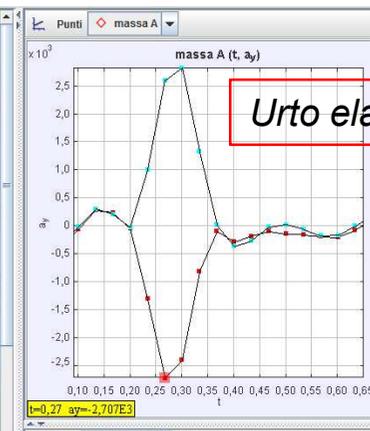
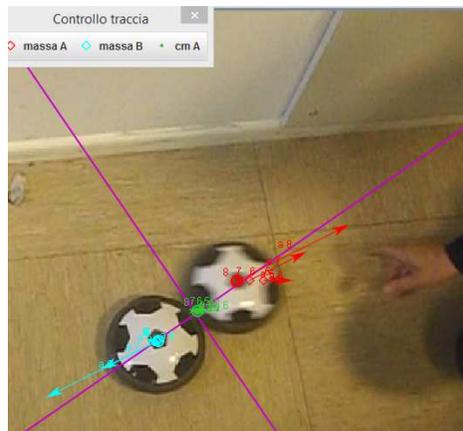
Definire nuova grandezza $F = m \cdot a_x$ per entrambe le masse



Urto elastico, masse diverse



Urto anelastico



Urto elastico in 2 dimensioni



Il piano inclinato

Controllo traccia
goniometro A massa A

$\alpha = 12,8^\circ$

uso della memoria: 21MB di 989M

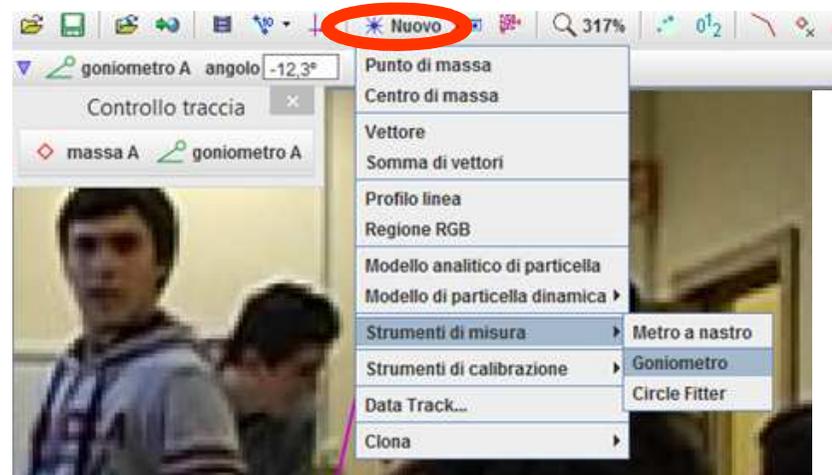
Punti massa A

massa A (t, vx) $\times 10^2$

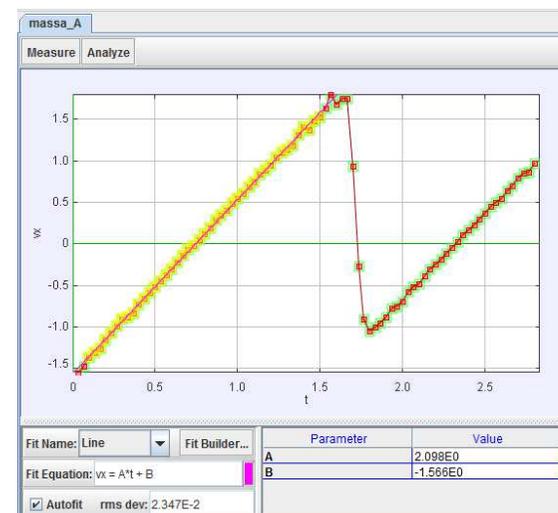
t	x	y
0.000	-172.9	10.41
0.033	-192.3	10.10
0.067	-210.7	10.00
0.100	-228.3	9.916
0.133	-244.2	9.820
0.167	-260.4	9.638
0.200	-275.0	9.777
0.233	-288.6	9.680
0.267	-301.3	9.793
0.300	-312.9	9.559
0.333	-323.5	9.045
0.367	-334.4	8.409
0.400	-343.7	8.505
0.434	-352.2	8.531
0.467	-359.9	8.605
0.500	-366.4	8.534
0.534	-372.4	8.709
0.567	-377.3	8.745
0.600	-381.6	8.646
0.634	-384.8	9.022
0.667	-387.1	9.145
0.700	-388.3	8.892
0.734	-388.8	9.070
0.767	-388.7	9.408



Usare il goniometro



- **Strumenti di misura.** Il software fornisce la possibilità di utilizzare due strumenti di misura: il Metro a nastro e il Goniometro. Dopo aver selezionato il comando Metro a nastro, nella schermata video viene visualizzata una freccia rossa, mostrata in Figura 3.3. Trascinando le estremità del Metro a nastro è possibile collocarle in qualsiasi punto della schermata video e conoscere, in base alla scala di misura adottata, la distanza tra le due estremità, osservando il numero che compare al di sopra dello strumento o nello spazio apposito presente nella barra relativa posta sopra la finestra video. Cliccando su l'icona del Metro a nastro  Metro a nastro A si apre un menù, mostrato in Figura 3.3, che permette di definire ulteriori opzioni e caratteristiche dell'oggetto. Dopo aver selezionato il comando Goniometro, nella schermata video viene

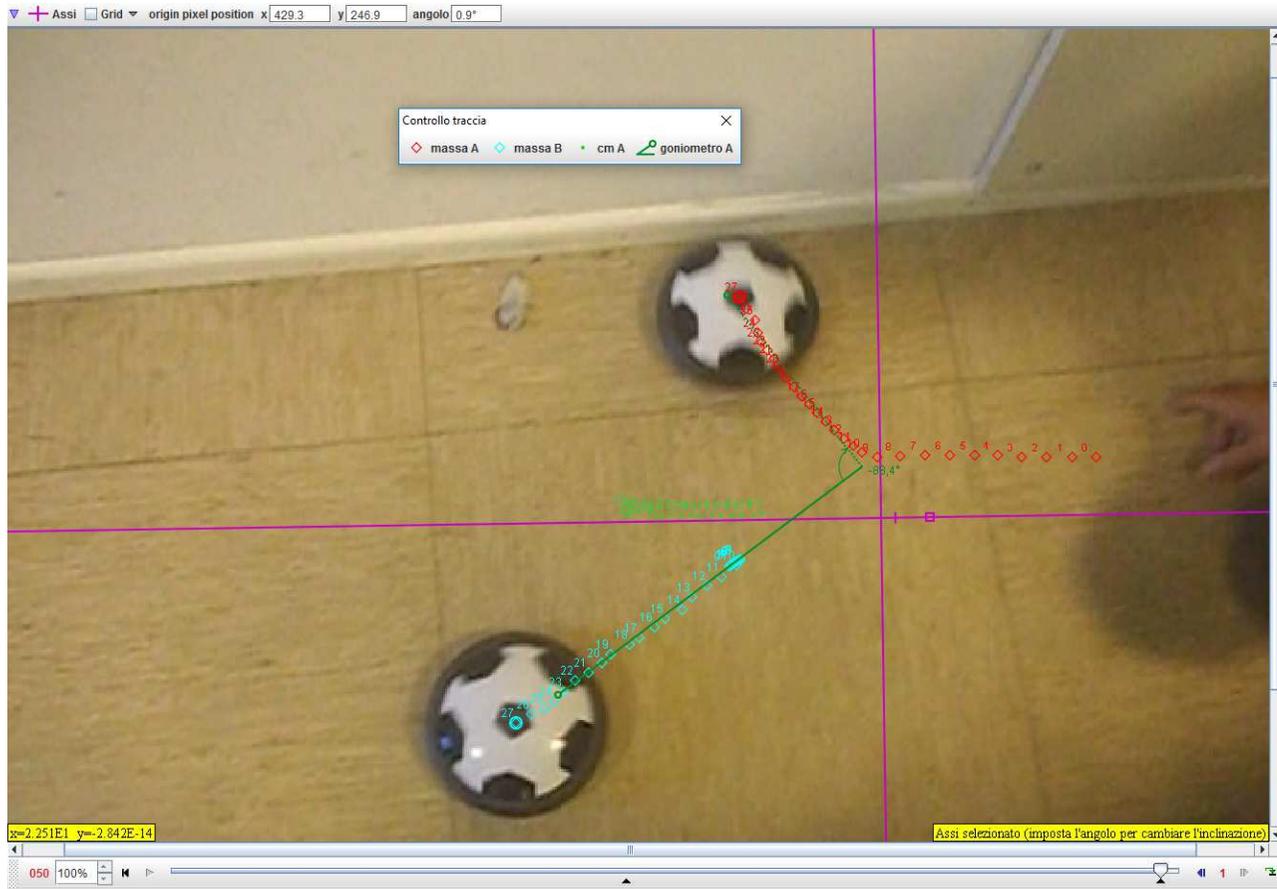


visualizzato uno strumento in verde che ha un vertice, due braccia, una freccia di arco, mostrato in Figura 3.4. Trascinando le estremità e l'origine dello strumento si possono misurare archi angolari, il cui valore viene mostrato di fianco allo strumento o nello spazio apposito presente nella barra relativa posta sopra la finestra video. Cliccando su l'icona del Goniometro  goniometro A si apre un menù, mostrato in Figura 3.4, che permette di definire ulteriori opzioni e caratteristiche dell'oggetto.

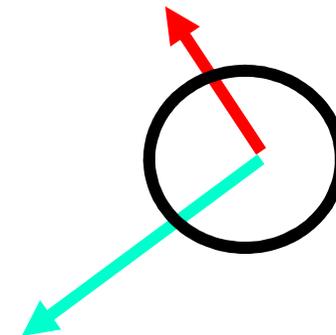
$$g = a / \sin(\alpha) = 9.5 \text{ m/s}^2$$



Il goniometro nell'urto in 2 dimensioni



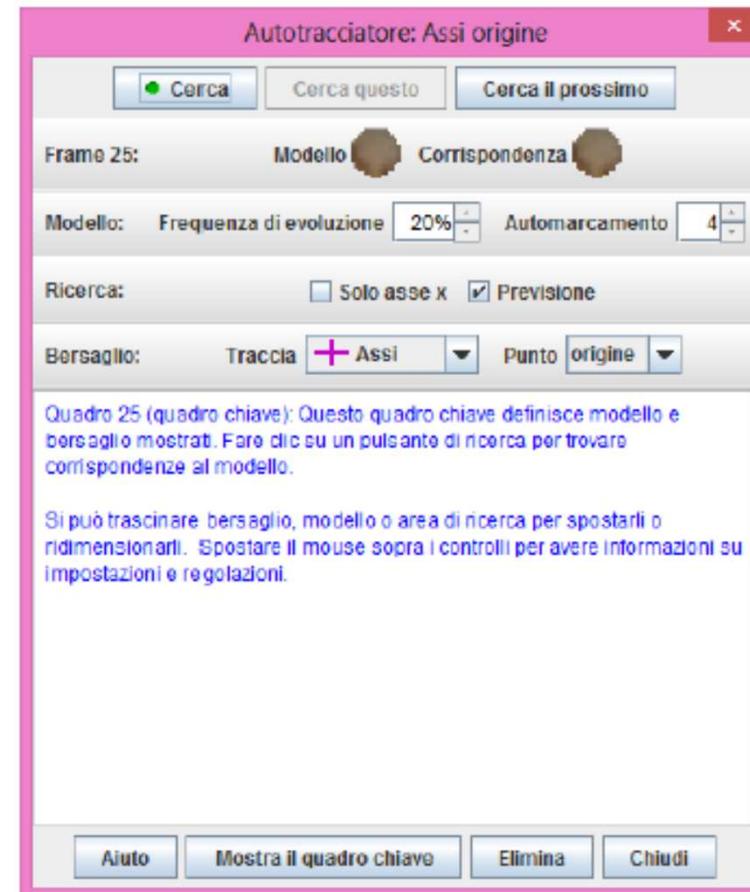
Mostrare che l'angolo tra le velocità finali nell'urto elastico in 2 dimensioni tra corpi di uguale massa è 90° ($\alpha = 88.2^\circ$ in figura)





Il software permette inoltre di definire gli assi sia fissi in un determinato punto, che mobili, in modo da seguire un oggetto che si sposta nel video, grazie alla funzione autotracciamento.

Shift-Ctrl-Click per prendere il punto lungo la traccia selezionando assi





Sistema di riferimento del laboratorio

azione A lunghezza scala 2,000 angolo nastro 0,2°

Controllo traccia
 ◇ massa A ◇ massa B

uso della memoria: 44MB di 989M

massa A (x, y)

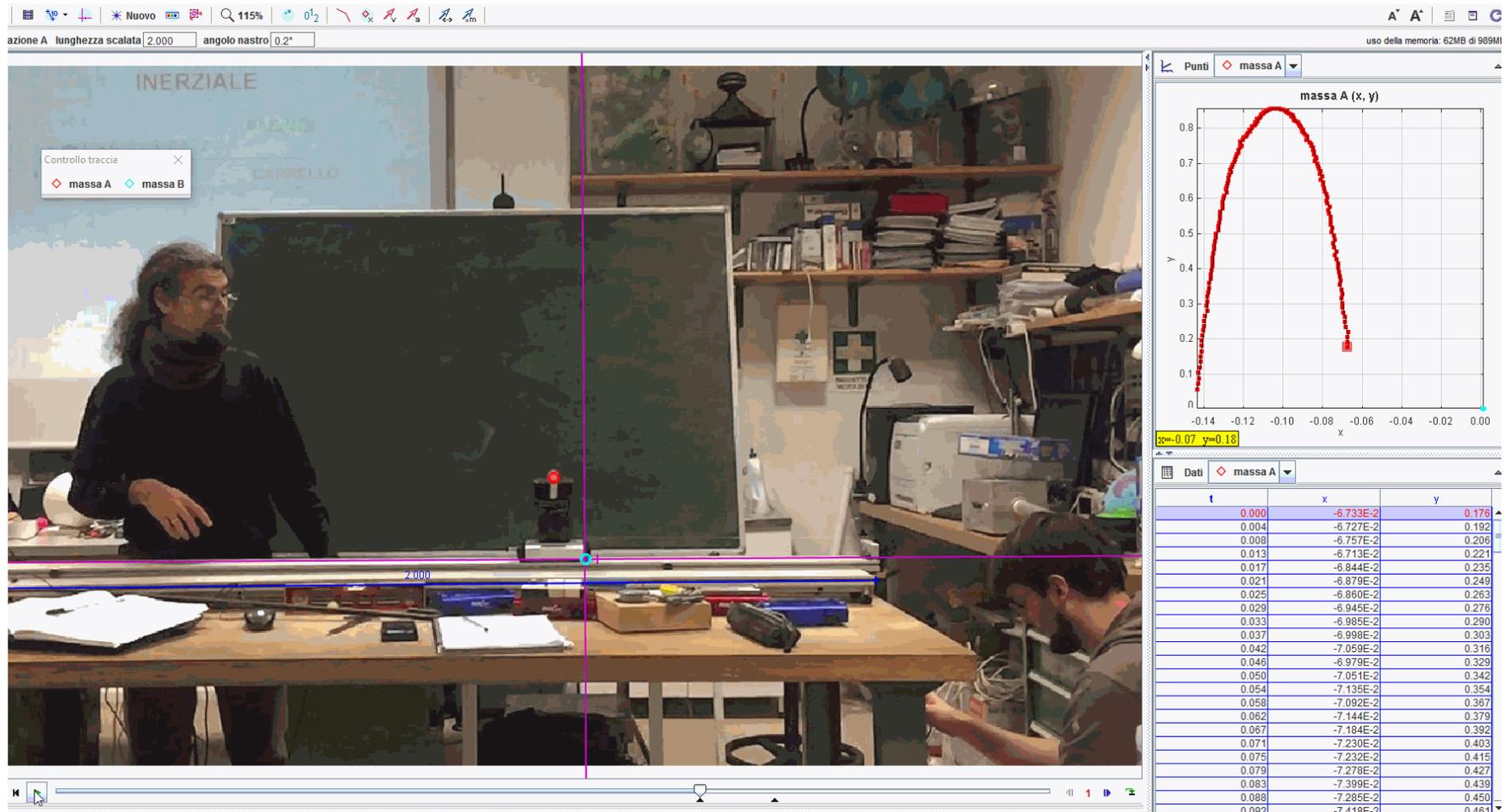
z=0.53 y=0.20

t	x	y
0.000	0.598	4.610E-2
0.004	0.600	4.587E-2
0.008	0.602	4.589E-2
0.013	0.603	4.596E-2
0.017	0.604	4.580E-2
0.021	0.606	4.562E-2
0.025	0.607	4.600E-2
0.029	0.609	4.584E-2
0.033	0.610	4.583E-2
0.037	0.611	4.604E-2
0.042	0.613	4.606E-2
0.046	0.614	4.619E-2
0.050	0.615	4.609E-2
0.054	0.617	4.604E-2
0.058	0.618	4.613E-2
0.062	0.620	4.594E-2
0.067	0.621	4.593E-2
0.071	0.623	4.597E-2
0.075	0.624	4.579E-2
0.079	0.625	4.586E-2
0.083	0.627	4.576E-2
0.088	0.628	4.590E-2
0.092	0.630	4.504E-2

asta di calibrazione A selezionato (impostare la lunghezza per cambiare scala, impostare l'angolo per cambiare pendenza all'asse)



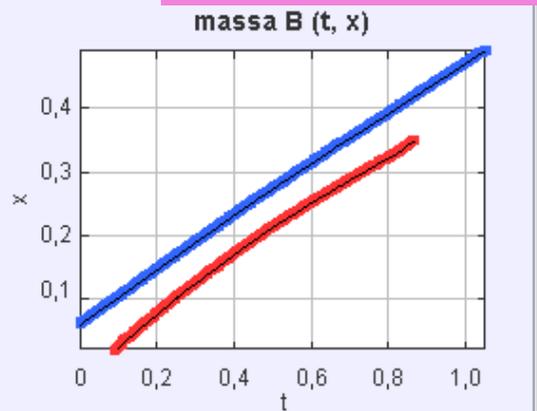
Sistema di riferimento del carrello



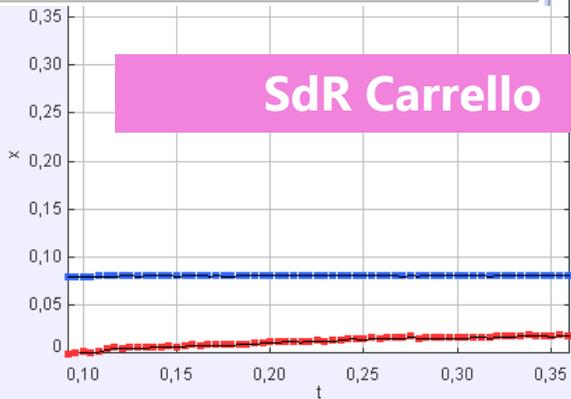


Legge oraria $x(t)$

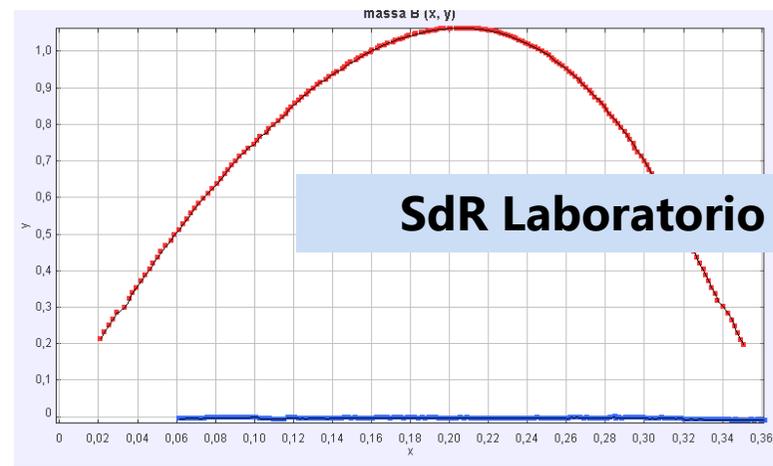
SdR Laboratorio



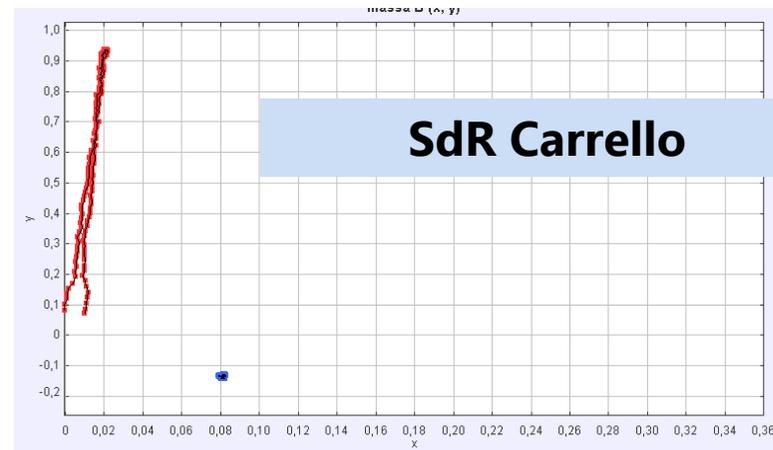
SdR Carrello



Traiettoria



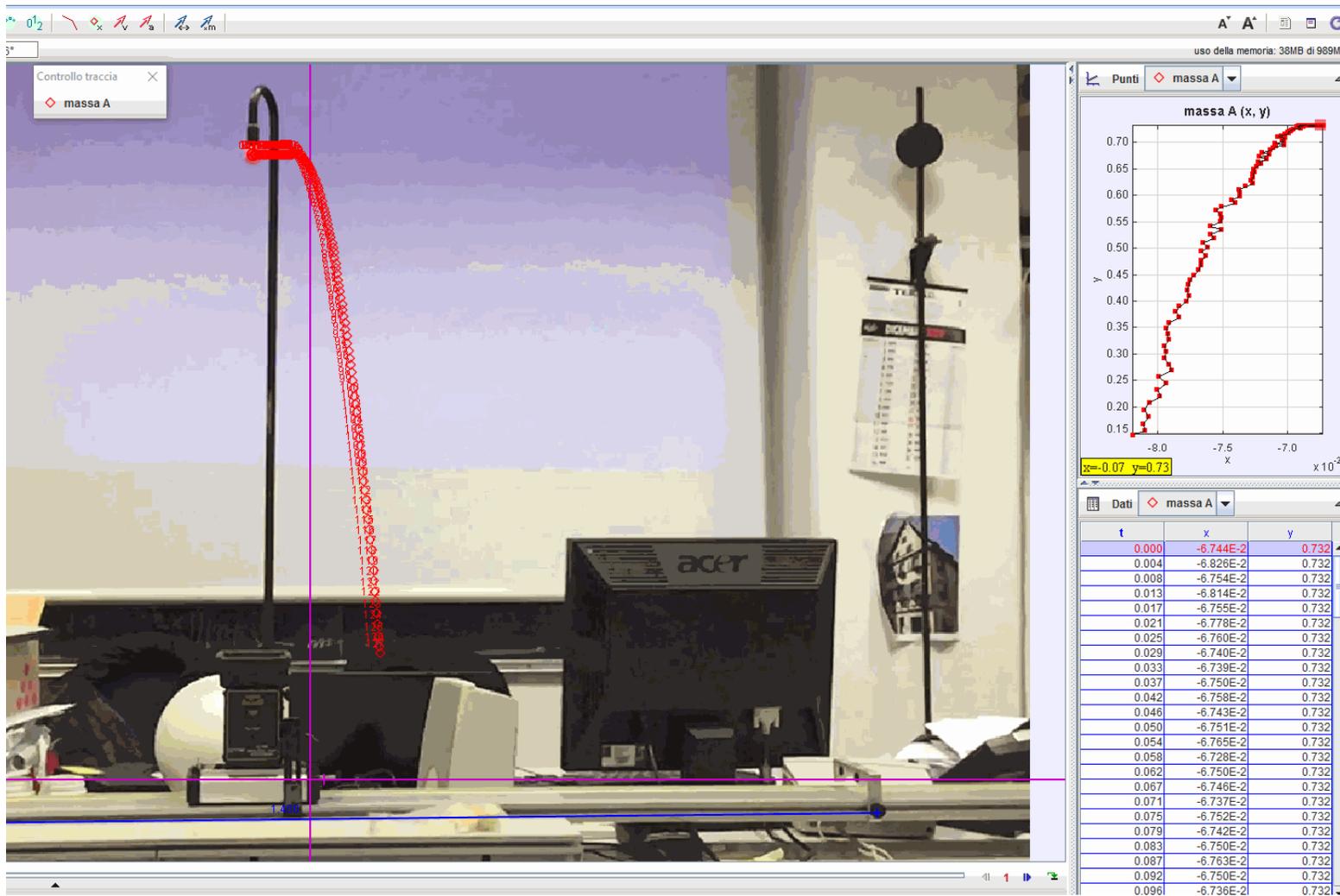
SdR Laboratorio



SdR Carrello

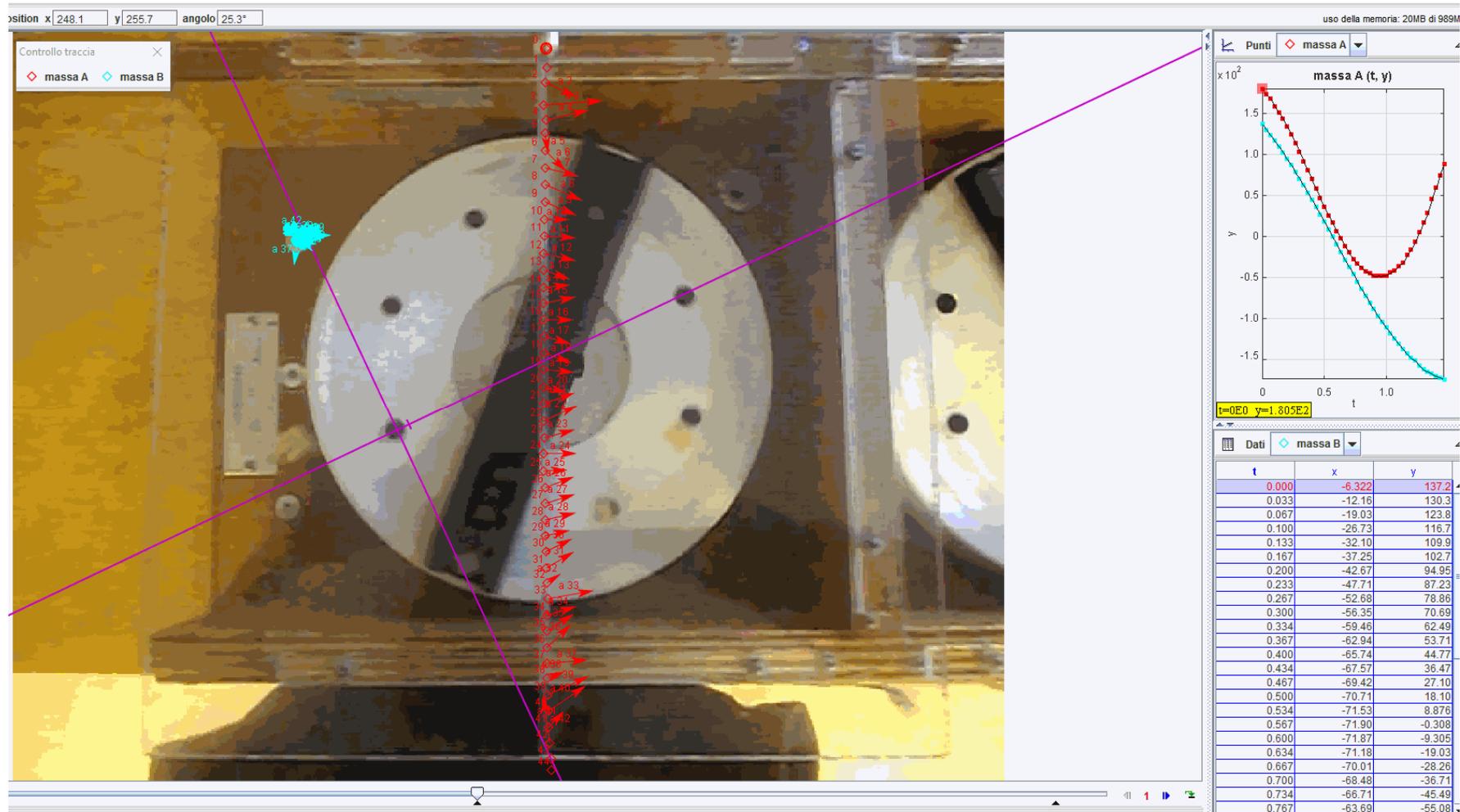


Variazioni sul tema

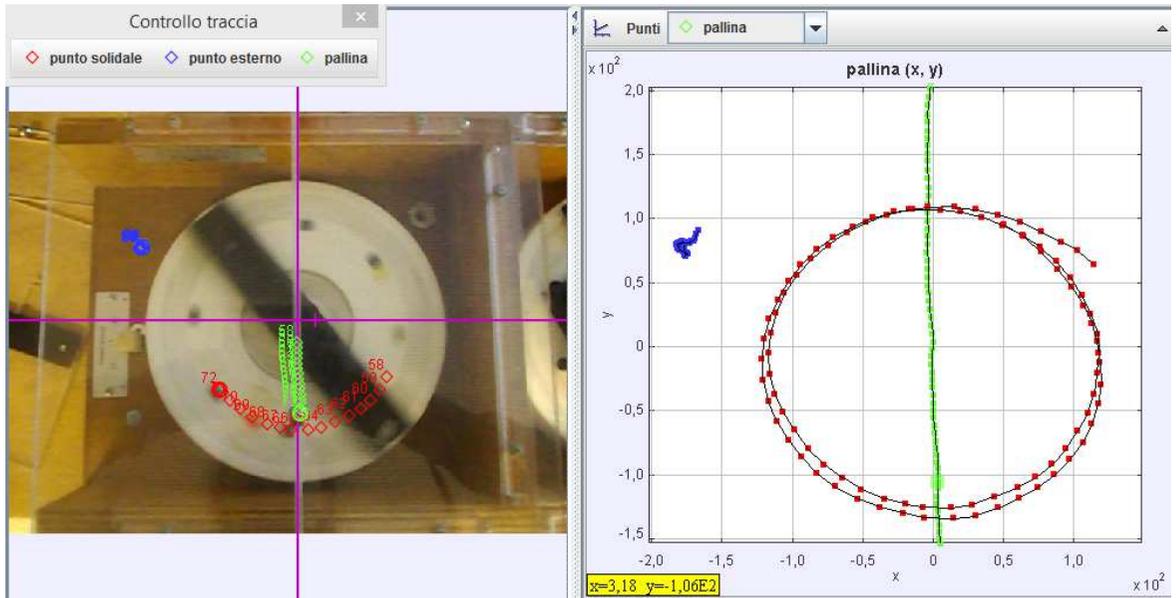




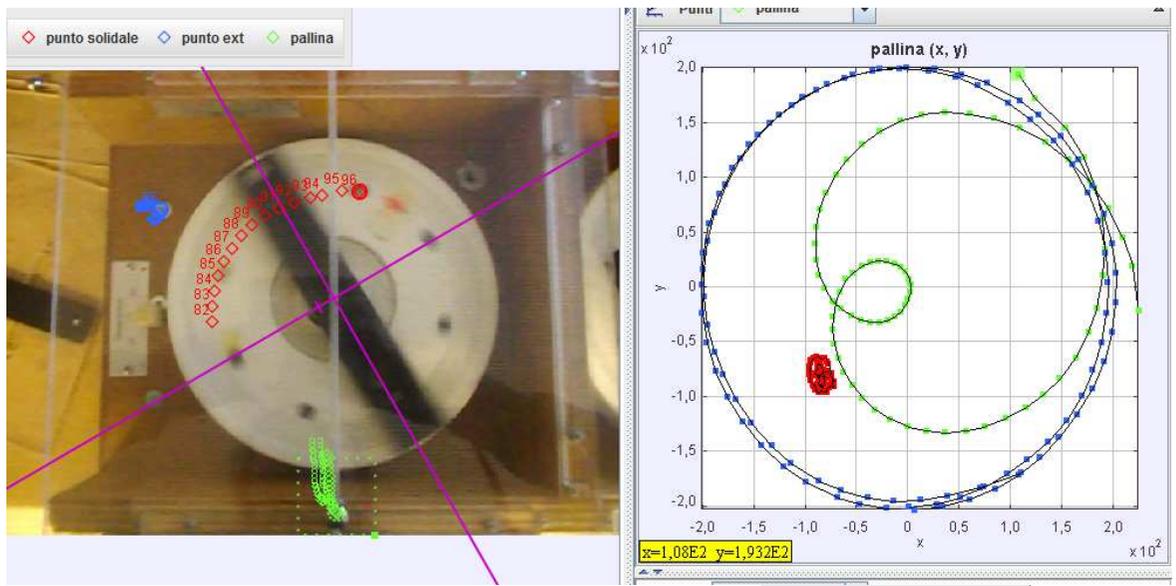
Forze apparenti



Sistemi di riferimento non inerziali



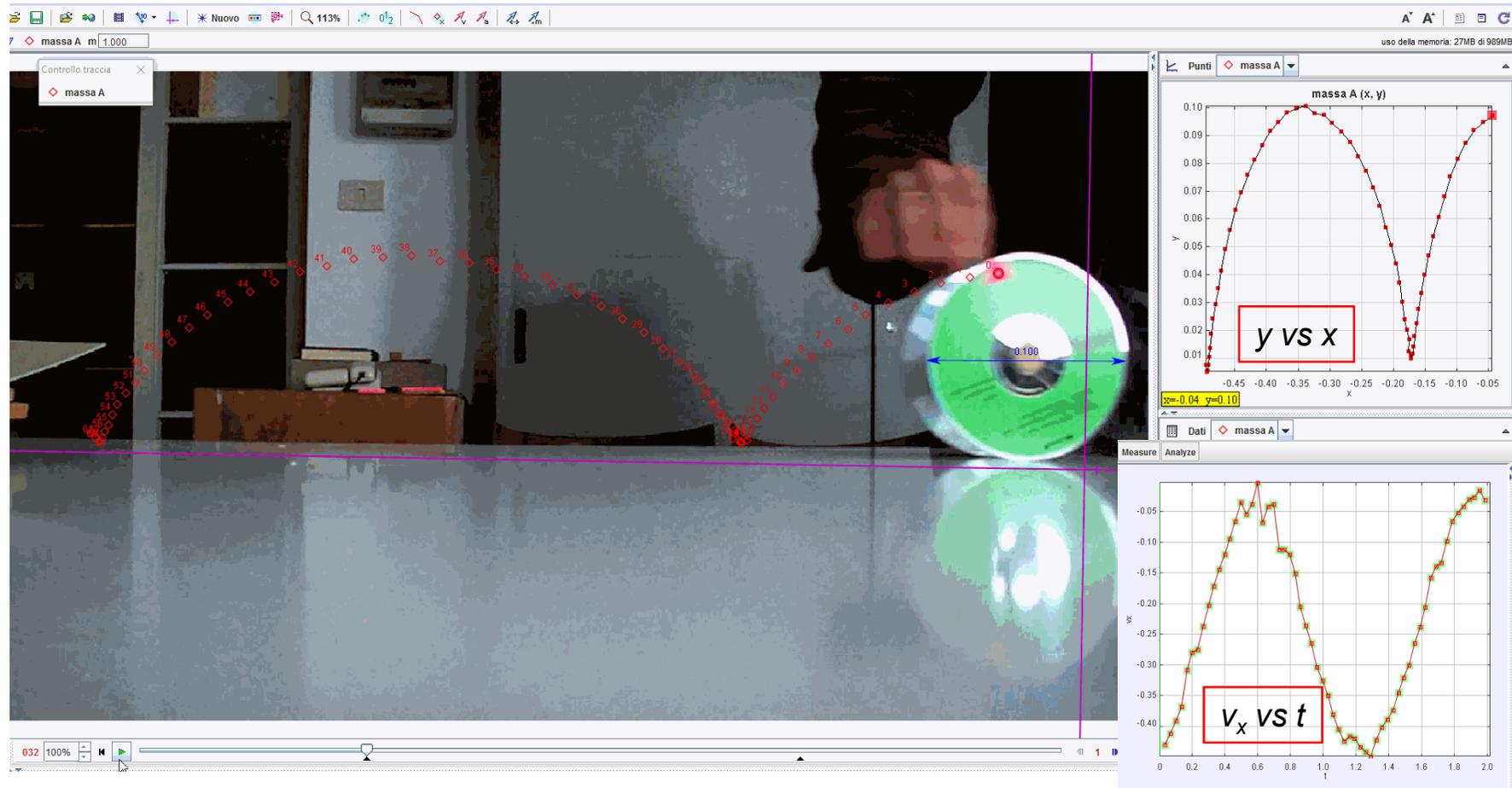
Traiettorie nel SdR del laboratorio



Traiettorie nel SdR rotante (non inerziale)

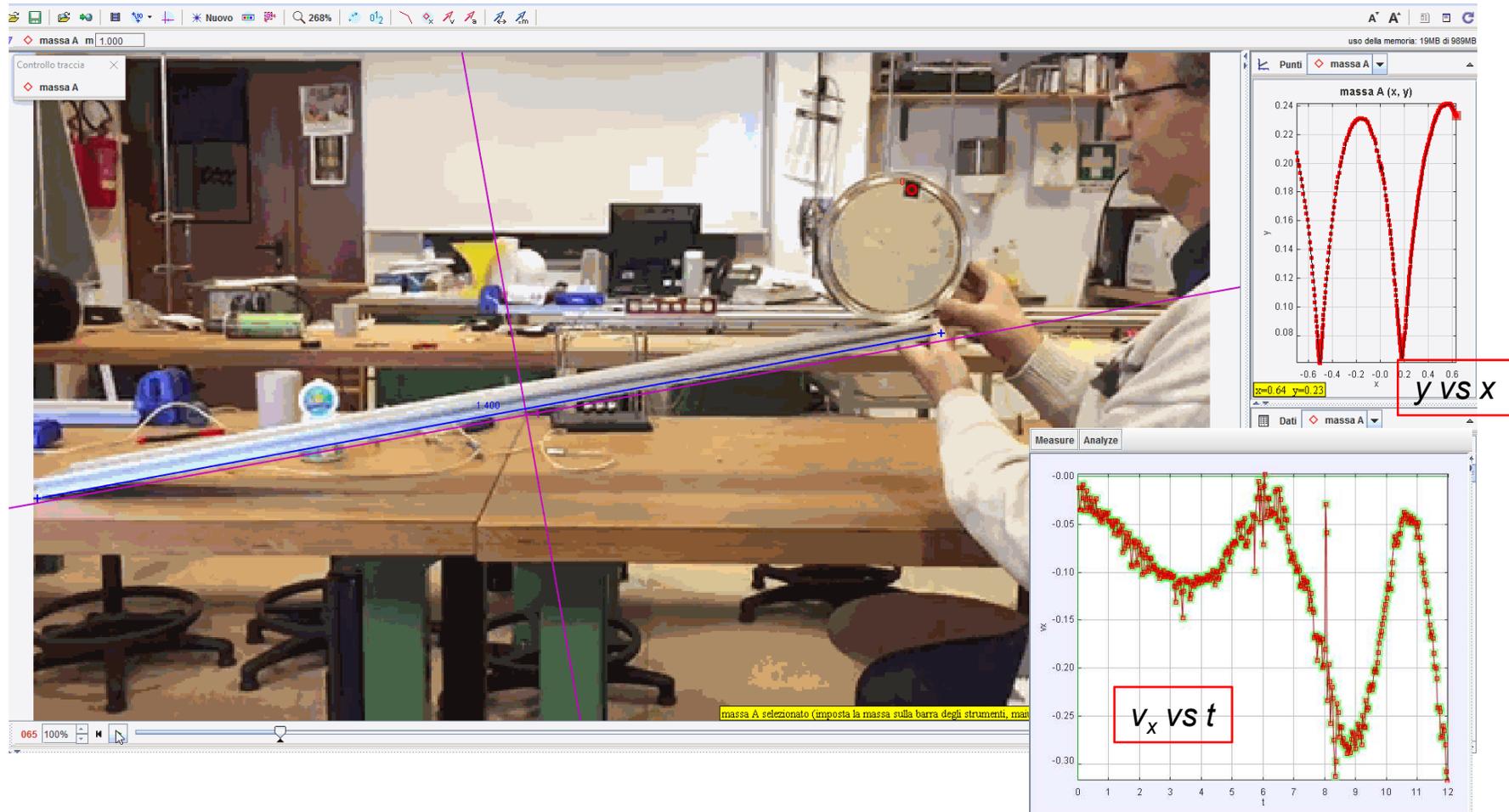


Il moto di puro rotolamento sul piano



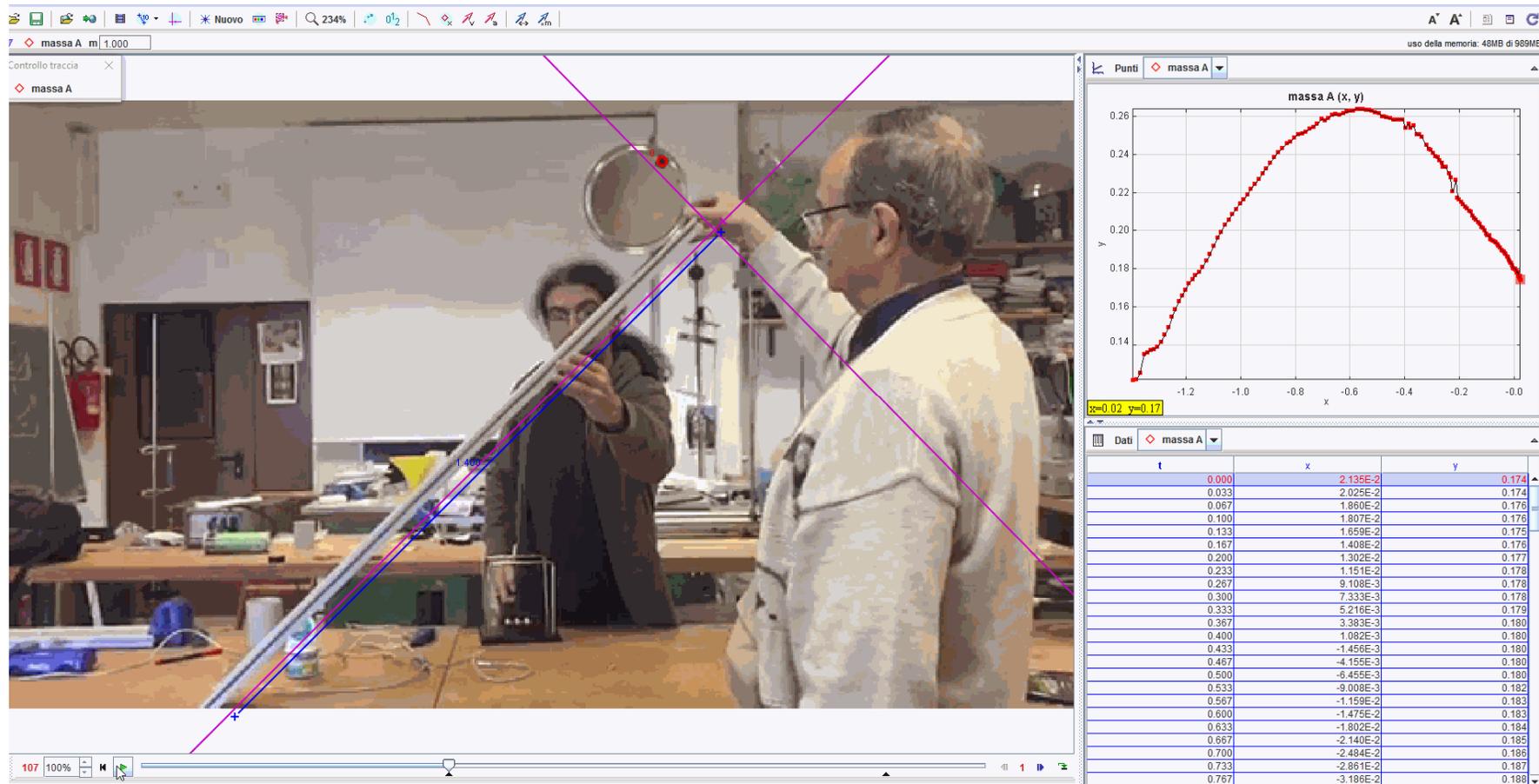


Rotolamento accelerato



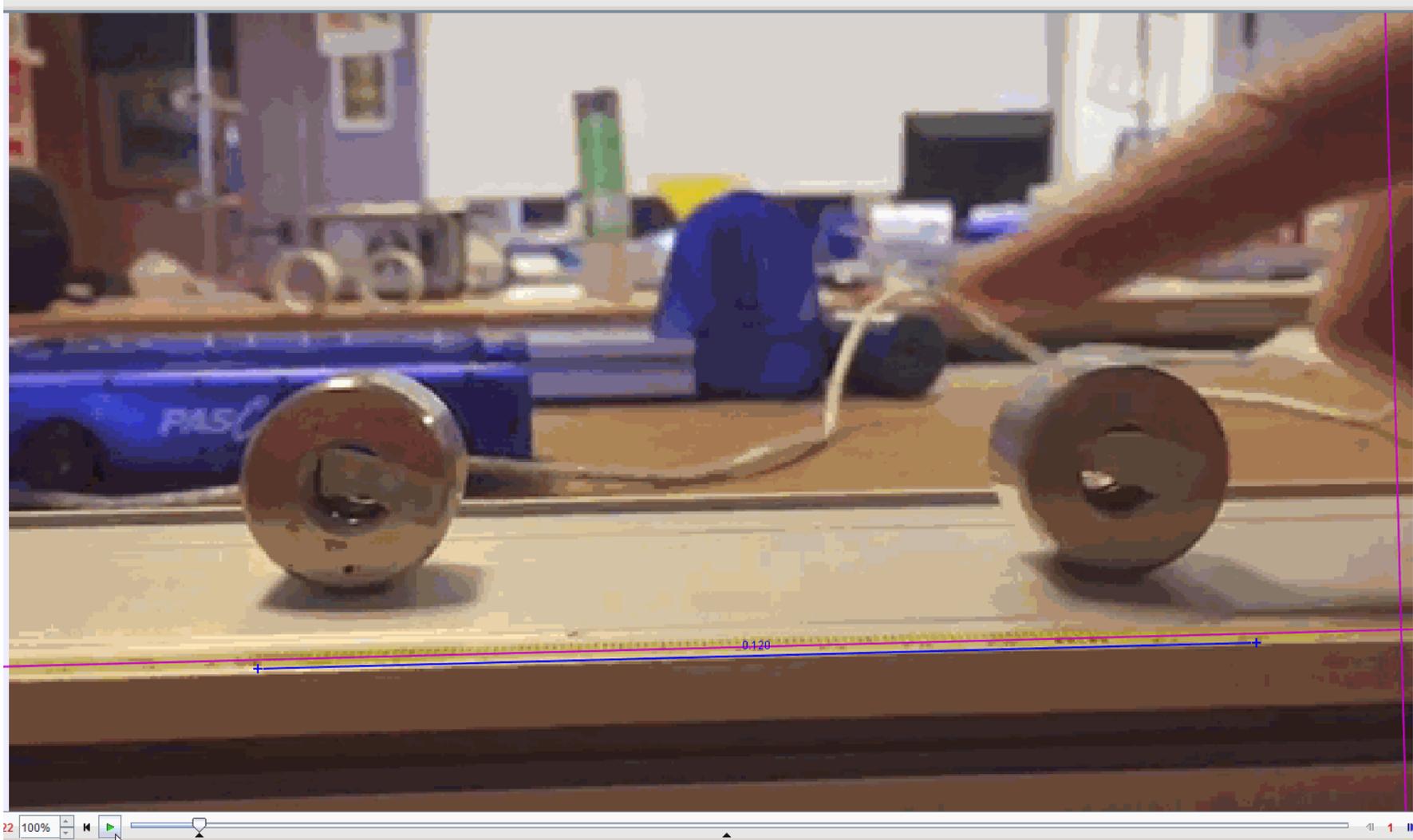


Rotolamento con strisciamento





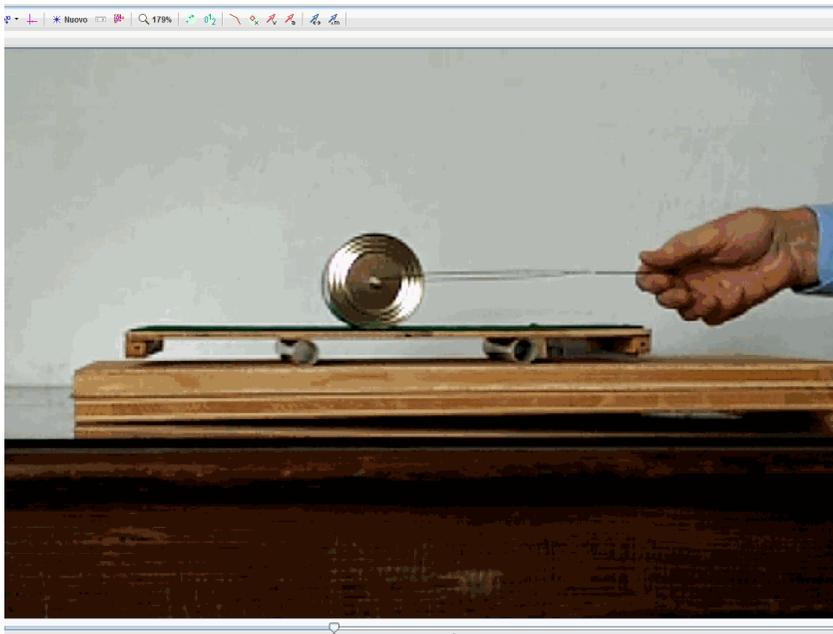
Urti di oggetti rotolanti: ruolo dell'attrito



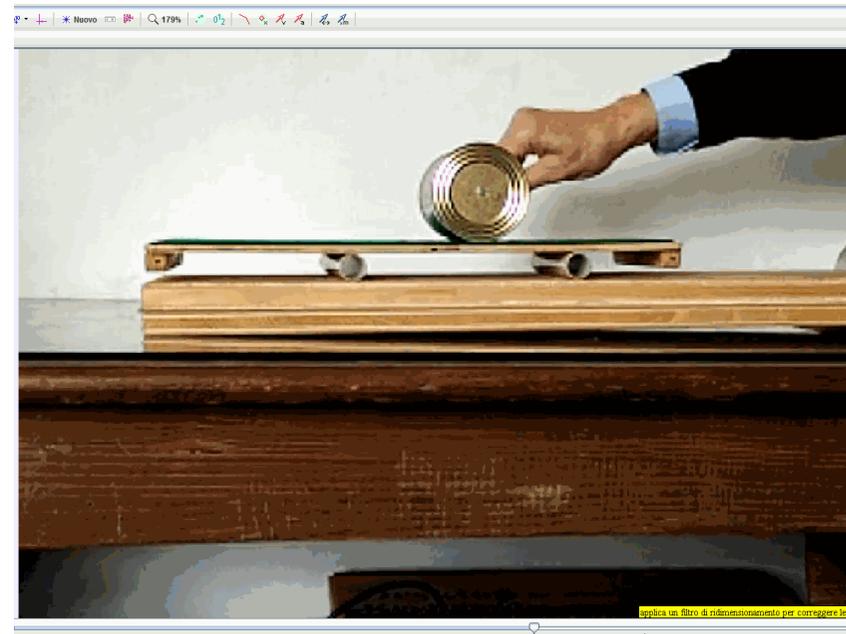


Moto di rotolamento accelerato e attrito

Moto di rotolamento accelerato da una forza applicata nel centro di massa.



Moto di rotolamento accelerato da una coppia motrice.

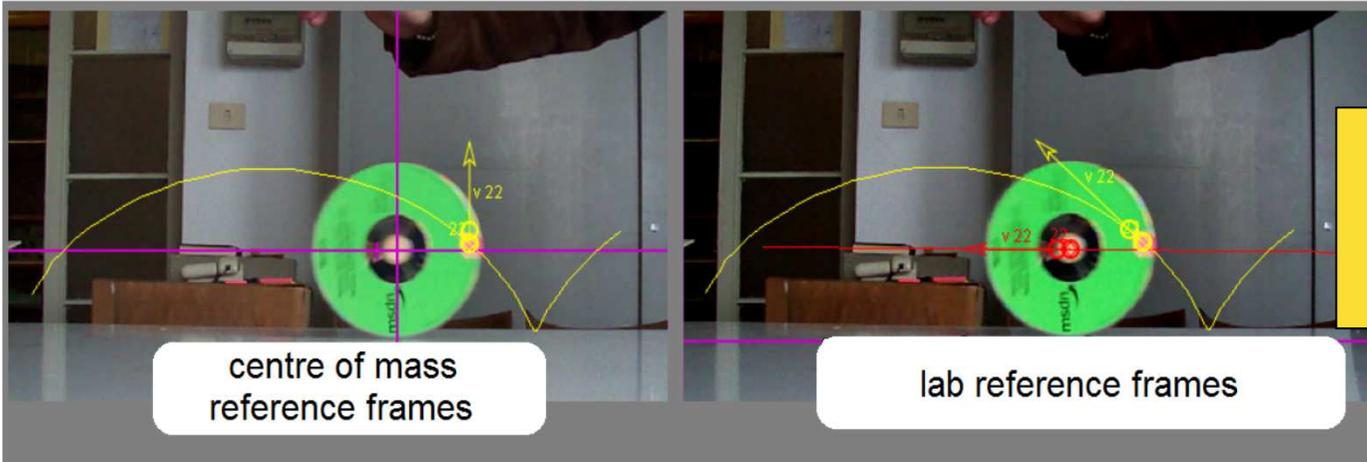


- In alcuni casi i video in slow motion possono essere usati da soli per chiarire alcuni concetti, anche senza usare Tracker, o facendone un uso limitato alla sottolineatura di alcuni dettagli.



- I video precedenti sull'attrito e le attività con Tracker ad essi associate possono essere inseriti in un percorso significativo che affianchi attività di video analisi a simulazioni con Algodoo
- In una prima fase, gli studenti svolgono attività sperimentali guidate che mettono in evidenza aspetti concettuali problematici
- In una seconda fase, gli studenti progettano ed esplorano simulazioni in un "micromondo" basato su Algodoo, prima basandosi sugli esperimenti condotti e poi liberamente, a partire da una domanda-stimolo.
- Man mano che l'attività prosegue l'intervento dell'insegnante si riduce : gli studenti sono liberi di progettare ed esplorare, ma all'interno del micro-mondo delimitato dal software.

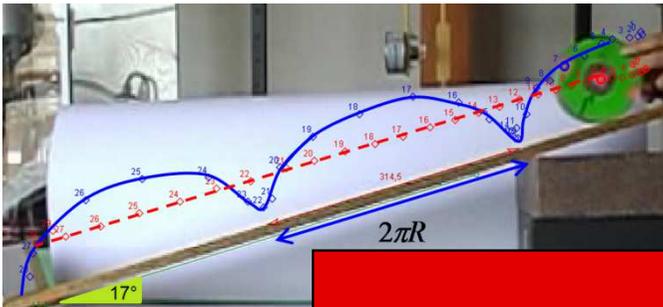




Video analisi del rotolamento su piano orizzontale

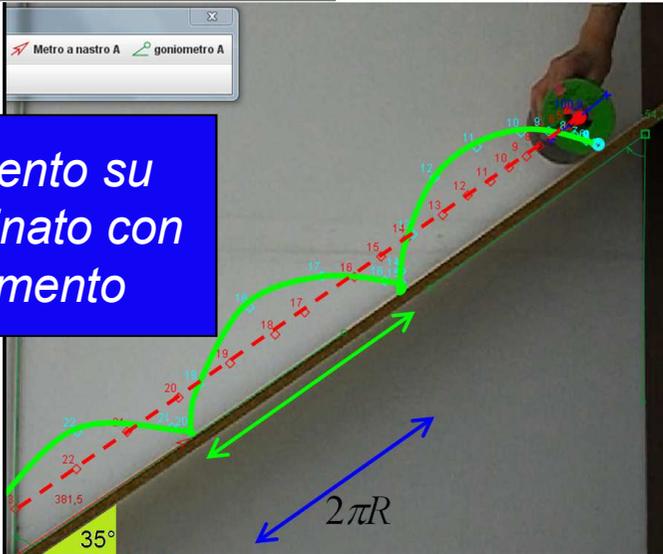
centre of mass reference frames

lab reference frames



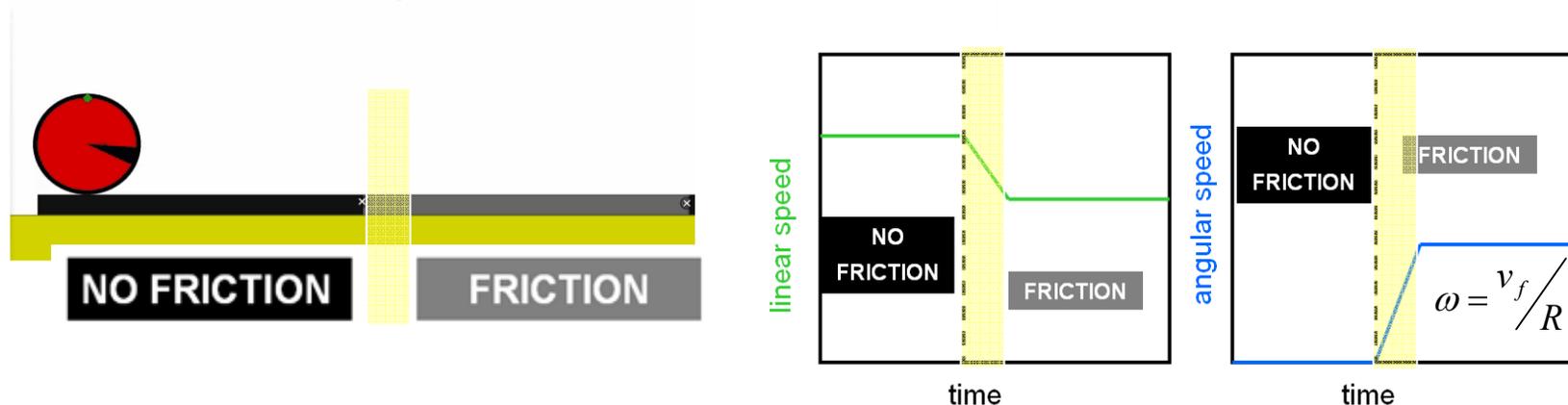
Puro rotolamento su piano inclinato

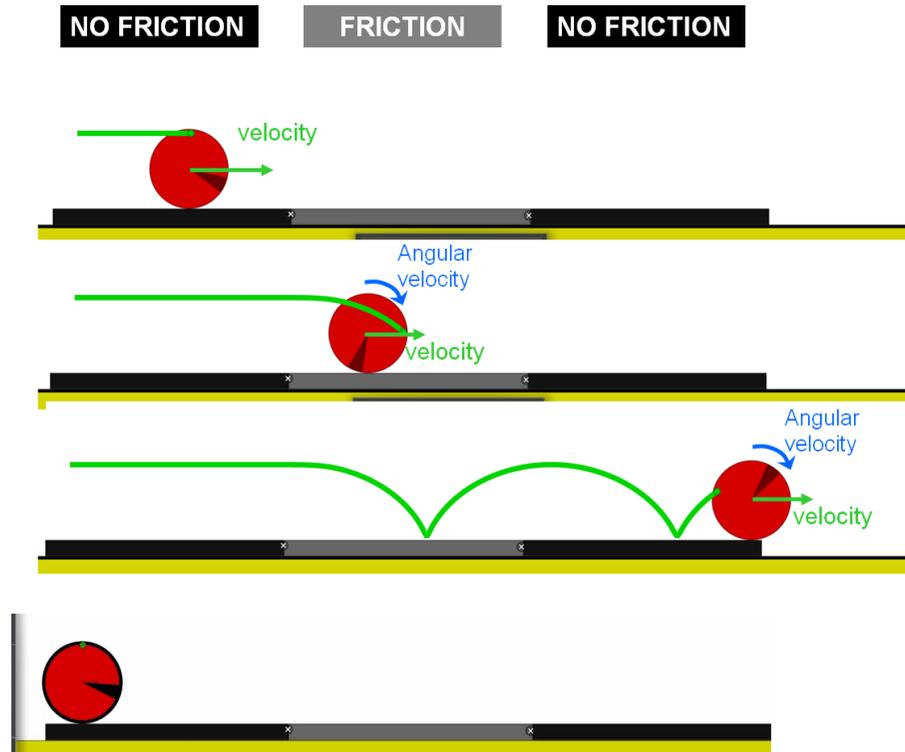
Rotolamento su piano inclinato con strisciamento



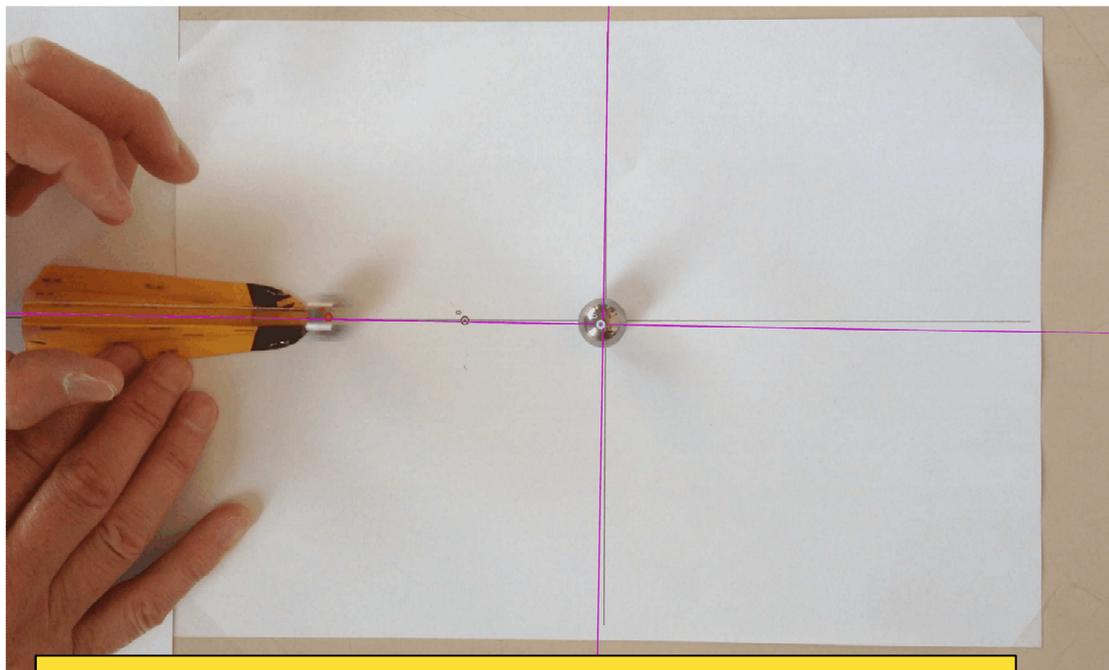


- Gli studenti sviluppano gradualmente simulazioni in cui le biglie rotolano su piani con attrito variabile. La simulazione consente di impostare i parametri anche su valori che non sono realisticamente ottenibili in laboratorio didattico per evidenziare il "limite" dei processi fisici.
- Viene messo in evidenza il ruolo dell'attrito nell'innescare il moto di rotolamento a partire dal moto di traslazione.



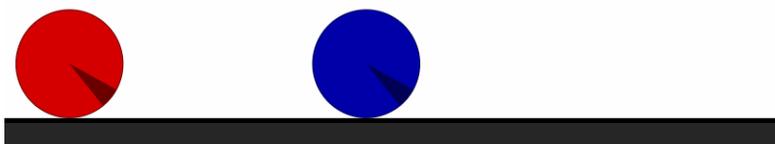


- Attraverso le simulazioni è possibile mettere in evidenza che l'attrito non è necessario per mantenere un moto di rotolamento a velocità costante.
- Gli studenti possono superare l'idea intuitiva che un momento della forza sia necessario per mantenere il moto rotatorio.



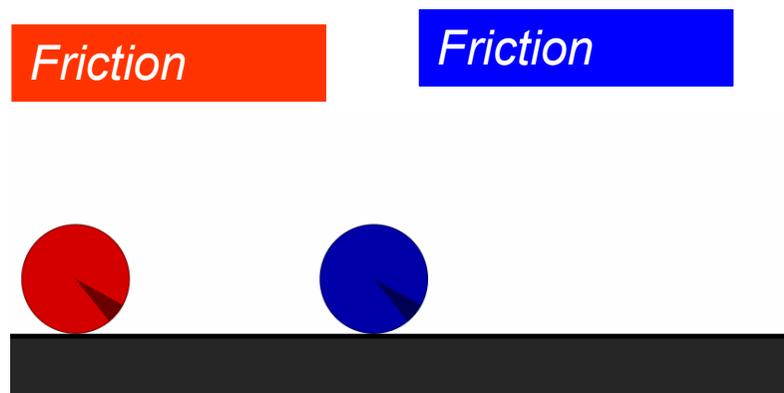
La collisione tra due sfere in moto di rotolamento è un problema non banale, nel quale viene messo in evidenza il ruolo dell'attrito statico nel trasformare il moto da traslazione a rotolamento e viceversa.

Perchè la biglia-proiettile non si ferma dopo la collisione?





- Gli studenti analizzano l'urto fra due palline in diversi casi. Attraverso le simulazioni si rendono conto della differenza tra l'urto di due particelle libere e l'urto tra due biglie rotolanti.



- Il coefficiente di attrito assume il ruolo di parametro-chiave e guida la costruzione dei modelli mentali degli studenti: solo il momento lineare viene direttamente trasmesso nell'urto, per la trasmissione del moto rotatorio gioca un ruolo centrale l'attrito.



	μ_A	μ_B	v_C before	ω_C before	v_C after	ω_C after	v_O after	ω_O after
(I) Translating cue without friction	= 0	= 0	$\neq 0$	= 0	= 0	= 0	v_C before	= 0
(II) Translating and rotating cue without friction	= 0	= 0	$\neq 0$	$\neq 0$	= 0	ω_C before	v_C before	= 0
(III) Translating and rotating cue with friction on the plane B	= 0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	= 0	ω_C before	$v_O < v_C$	$\omega_O = v_O / R$
(IV) Translating and rotating cue with friction on the plane A	$\neq 0$	= 0	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	v_C before	= 0
(V) Translating and rotating cue with friction on the plane A and B	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$	$\neq 0$

- Le strategie degli studenti sono spesso basate sul dividere il problema in parti e analizzarle caso per caso fino a raggiungere un quadro complessivo

