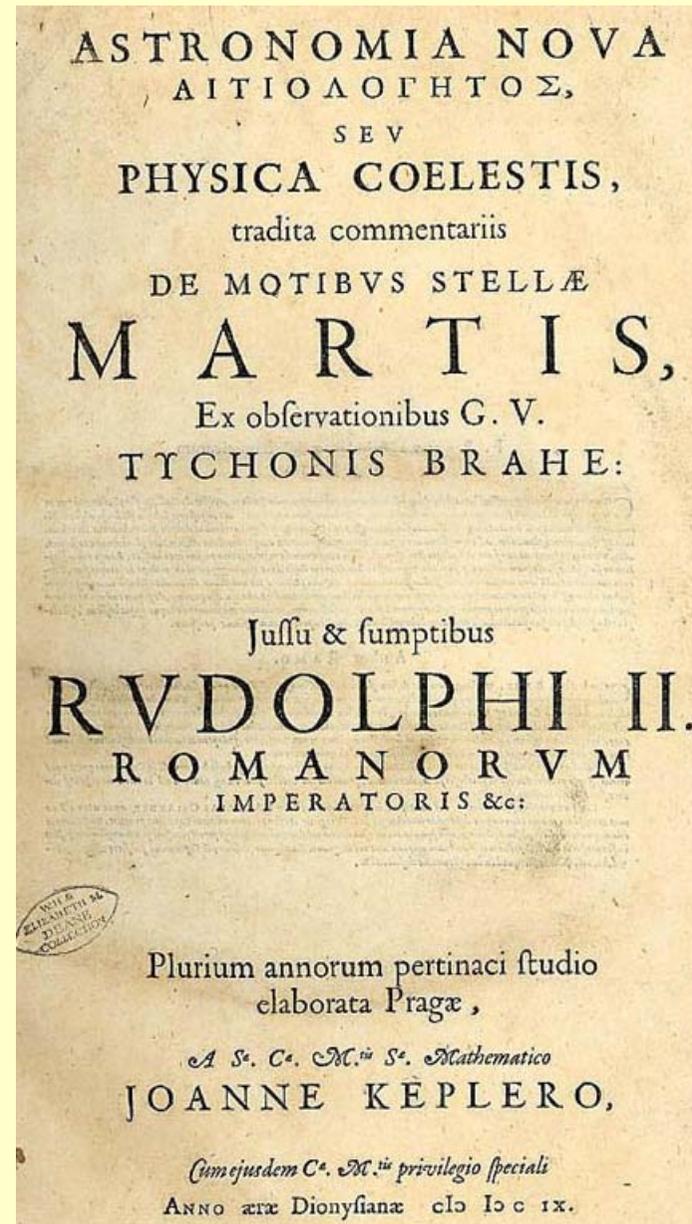


Il ruolo fondamentale della
matematica e della precisione:
Keplero (1571-1630) come esempio

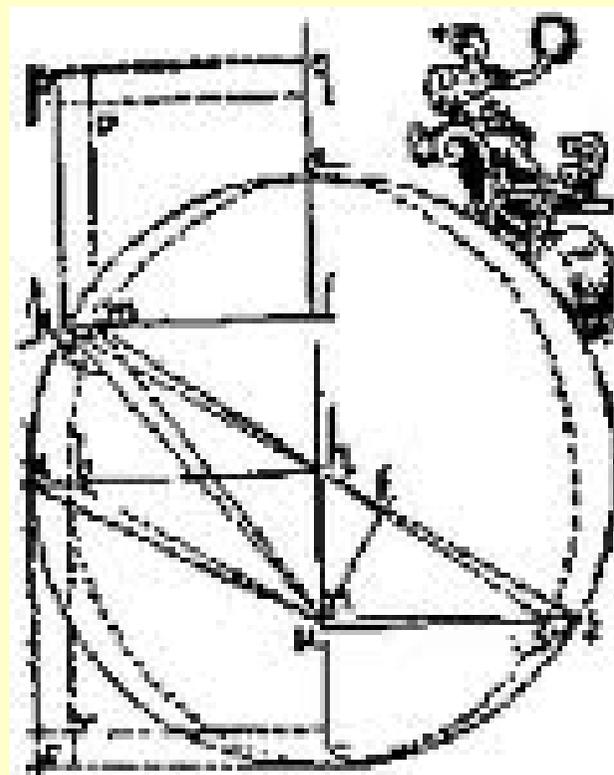
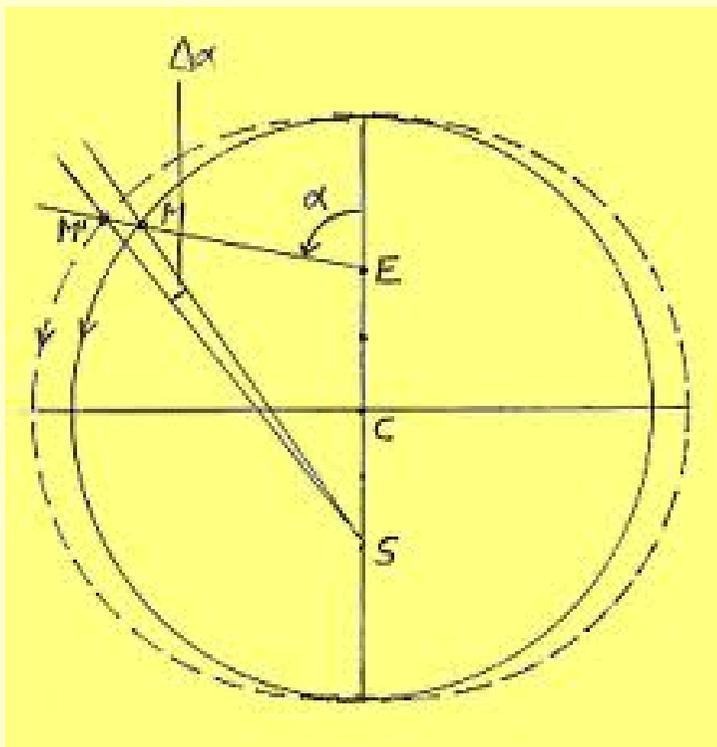
Keplero (1571-1630)



L'Astronomia nova di Keplero



Keplero ricava l'orbita ellittica di Marte



Keplero ottiene i suoi straordinari risultati sfruttando le precise misurazioni di Tycho Brahe, che raggiunge precisioni di **2 minuti d'arco** (da confrontare con gli **8 minuti d'arco** garantiti dal sistema tolemaico nella versione tecnica).

La *Astronomia nova* di Keplero (orbite ellittiche e nuove leggi matematiche)

- Il lavoro di Keplero (1571-1630) è molto complesso.
- Usa le osservazioni molto precise di Tycho Brahe per migliorare l'accordo tra i valori del calcolo delle orbite e i valori effettivamente osservati.
- Studia l'orbita di Marte partendo dalle tecniche tradizionali (**deferente circolare eccentrico**), non trova accordo tra osservazioni e previsioni teoriche e introduce (in *Astronomia nova*, 1609):
 - **“Prima legge di Keplero”**: orbita ellittica di Marte col Sole in uno dei fuochi.
- Sempre nella *Astronomia nova* introduce:
 - **“Seconda legge di Keplero”**: la velocità del pianeta è inversamente proporzionale alla distanza dal Sole.
- La “terza legge di Keplero” viene pubblicata nel 1619 nell'opera *Harmonices mundi*:
 - **“Terza legge di Keplero”**: il rapporto tra i cubi delle distanze medie dal sole e il quadrato dei tempi di rivoluzione è costante per tutti i pianeti.

Che fa Galileo?

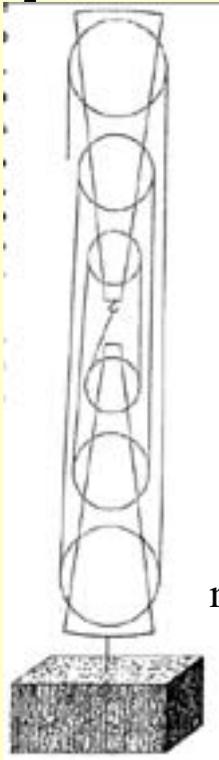
Note biografiche (1)

- 1564: Nasce a Pisa il 16 febbraio 1564.
- 1581 (17): Iscritto dal padre a **medicina** all'Università di Pisa,
- 1582-3 (18-19): Non gli piace le medicina e assiste di nascosto alle **lezioni di matematica** di Ostilio Ricci, matematico di corte del Granduca di Toscana.
- 1584 (20): Promette al padre che sarà in grado di mantenersi con la matematica e continua perciò a studiarla. È una **sfida rischiosa** perché all'epoca **la matematica rende poco** (meglio fare il medico o il professore di Filosofia: stipendi molto più alti).
- 1586 (22): Descrive di una **bilancia idrostatica** per misurare la densità dei corpi, ispirata dalle teorie idrostatiche di **Archimede** (riprese dall'edizione di scritti di statica e idrostatica del «**divino Archimede**» pubblicati da Tartaglia nel 1543).
- 1589-92 (25-28): **Professore di matematiche** all'**Università di Pisa**.

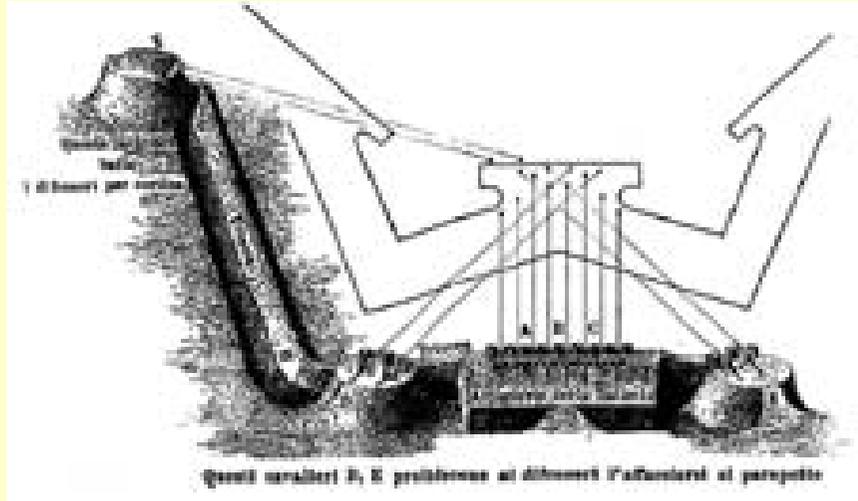
Note biografiche (2)

- 1592-1610: Pubblico professore di Matematiche all'Università di Padova. È un periodo molto fertile ma in buona parte tradizionale (con il **cannocchiale punto di svolta**):
 - studi sulle **fortificazioni militari**
 - studi di **meccanica e moto**
 - verifica della corretta **legge di caduta dei gravi** (1604)
 - studi sulla **supernova** del 1604 (almeno dal 1598 ha **convincimenti copernicani** ma non ha argomenti decisivi a favore).
 - invenzione di un **orologio ad acqua molto preciso** (~1604)
 - ricava **leggi del pendolo** con l'orologio ad acqua
 - realizza un **compasso geometrico-militare** (1606)
 - dimostra la **traiettoria parabolica dei proietti** (~1609)
 - perfeziona il **cannocchiale** e lo punta verso il cielo (1609-1610)
 - le conseguenze delle osservazioni astronomiche **sconvolgono la vita di Galileo e cambiano il corso della scienza occidentale.**

Il periodo padovano: tra tradizione e originalità



meccanica



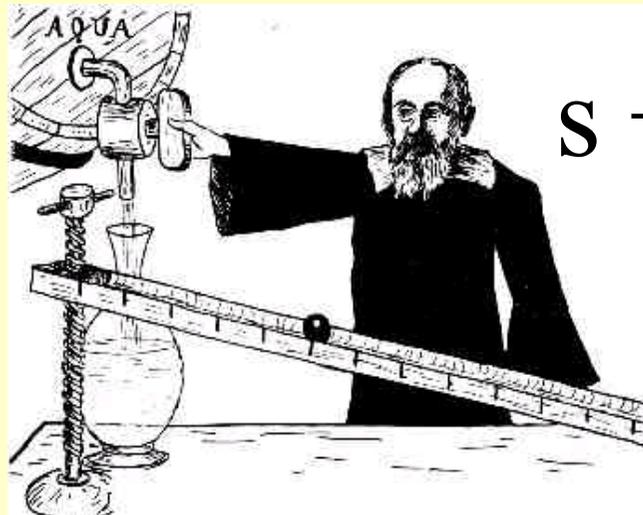
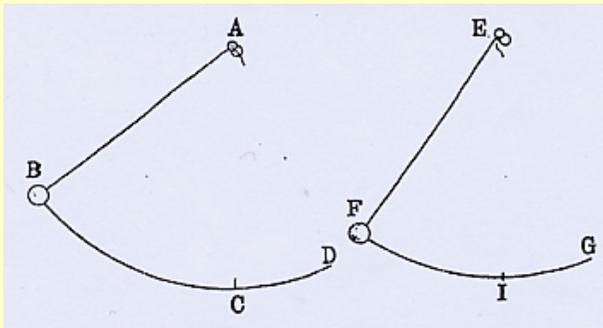
fortificazioni



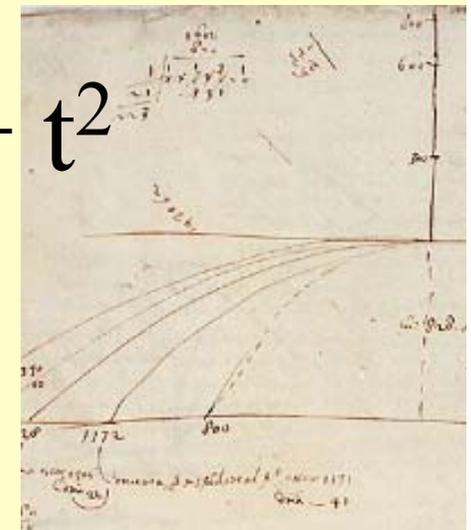
compasso geometrico e militare

caduta dei gravi, orologio ad acqua, composizione indisturbata di due moti ortogonali (1604-1609 ca.)

isocronismo del pendolo (1602)



$$s \div t^2$$



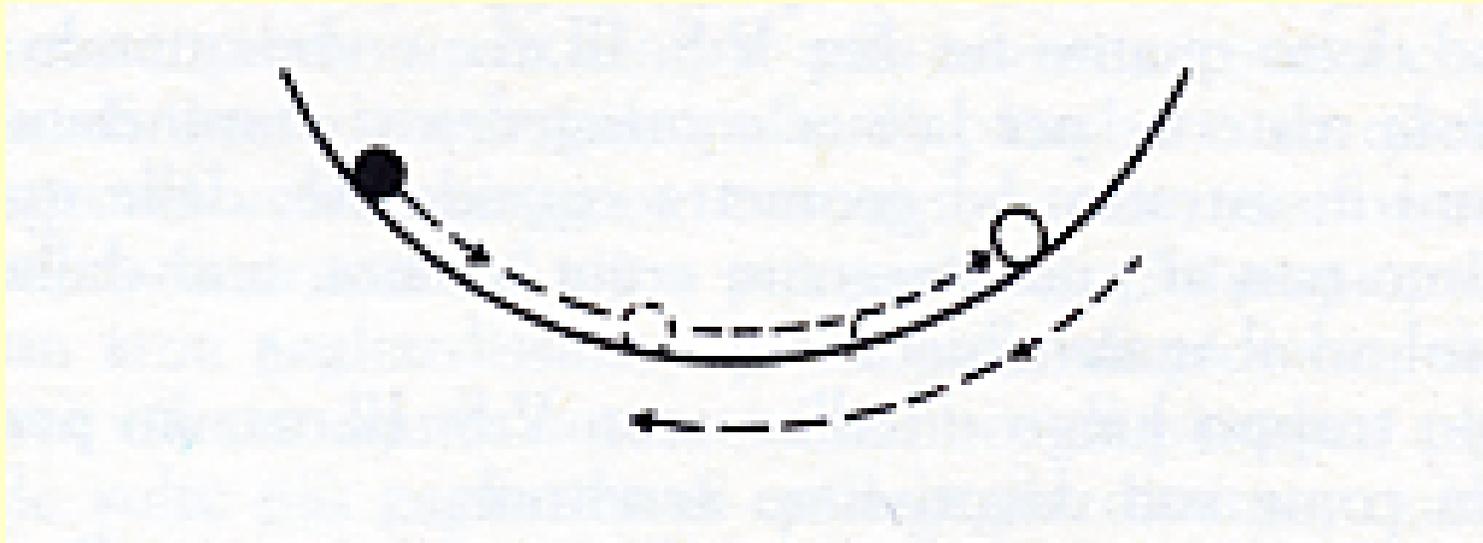
Galileo **sperimentatore** originale

- **1602a**: l'isocronismo del pendolo.
- **1602b**: teorema dell'isocronismo del moto di discesa lungo le corde di una circonferenza verticale
- **~1604**: misure sperimentali di confronto tra moto pendolare e moto di discesa lungo il diametro (corda massima) con sensibilità 1/90 di secondo

Galileo (1602a): Isocronismo del pendolo

- Sito per i manoscritti di Galileo: http://www.mpiwg-berlin.mpg.de/Galileo_Prototype/MAIN/LIST.HTM
- 29-11-1602, [lettera di Galileo a Guidobaldo del Monte](#) (Opere, X, pp. 97-100) su “moti fatti in tempi uguali nella medesima quarta del cerchio”, cioè moto in tempi uguali di una sfera sulla traiettoria di una semicirconferenza (composta da due “quarte” di 90° ciascuna).
- **Ovvero isocronismo del moto di una sfera su una traiettoria semicircolare.**

Una schematizzazione dell'esperimento di Guidobaldo con lo "scatolone"



La situazione

- Galileo dice di aver scritto una precedente lettera (che non abbiamo) in cui si è spiegato male e adesso vuole convincere Guidobaldo.
- Si ricava dalla lettera di Galileo del 29-11-1602 che Guidobaldo ha fatto l'esperimento usando uno "scatolone" circolare (p. 99) senza ottenere l'isocronismo indicato da Galileo.
- Galileo attribuisce il fallimento alle imperfezioni dello scatolone: "L'esperienza ... può essere assai incerta, sì per non essere la sua superficie [dello scatolone] ben pulita, sì forse per non essere perfettamente circolare, sì ancora per non si poter in un solo passaggio così bene osservare il momento stesso sul principio del moto." (p. 99).

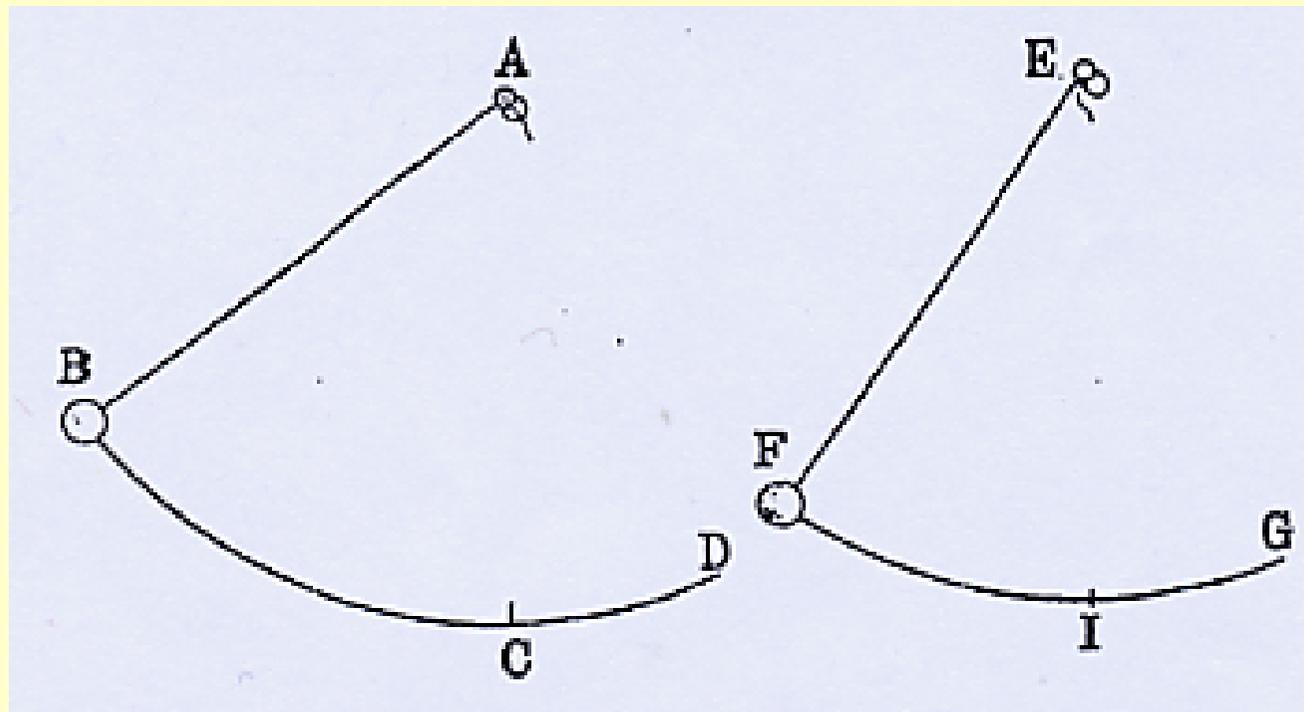
Galileo ripropone l'esperimento sull'isocronismo con due pendoli, non con lo scatolone

- “E perché l'esperienza con che mi sono principalmente chiarito di tal verità è tanto certa quanto da me confusamente stata esplicata nell'altra mia, la replicherò più apertamente, onde ancora lei, facendola, possa accertarsi di questa verità.” (p. 98).

L'esperimento di Galileo

- “Piglio dunque due fili sottili, lunghi ugualmente due o tre braccia l'uno ... e li [attacco] a due chiodetti A, E, e nell'altre estremità B, F lego due palle di piombo uguali (se ben niente importa se [fossero] disuguali.” (p. 98).
- Rimuovendo poi ciascuno de' detti pendoli [dalla perpendicolare] ma uno assai ... e l'altro pochissimo [li] lascio poi nell'istesso momento di tempo andar liberamente...” (p. 98).

Le oscillazioni pendolari con ampiezze diverse



L'isocronismo osservato da Galileo

- “Il mobile B passa per il grand'arco BCD, e ritorna per lo medesimo DCB, e poi ritorna verso D, e va per 500 e 1000 volte reiterando le sue reciprocazioni;
- ... l'altro parimenti va da F in G, e di qui torna in F, e parimenti farà molte reciprocazioni;
- ... e nel tempo ch'io numero [ad esempio], le prime cento grandi reciprocazioni BCD, DBC etc., un altro osservatore numera cento altre reciprocazioni per FIG piccolissime, e non ne numera pure una sola di più...” (p. 98).

Isocronismo stabilito sperimentalmente

- Il resoconto di Galileo presenta quindi l'isocronismo del pendolo come un risultato stabilito sperimentalmente.
- Non solo, ma dichiara di non possedere ancora una dimostrazione: “non posso [riuscire] a dimostrare come gli archi ... siano passati in tempi uguali: che è quello che cerco.” (p. 100).

Osservazioni (1)

- Noi sappiamo che, se le ampiezze di oscillazione di un pendolo rispetto all'altro, sono grandi l'isocronismo non viene rispettato.
- Per spiegare l'isocronismo riscontrato da Galileo, è ragionevole supporre uno smorzamento abbastanza veloce del pendolo a cui si dà inizialmente l'oscillazione più ampia.
- In questo modo ci si porta in condizioni in cui l'isocronismo è approssimativamente rispettato.

Osservazioni (2)

- Vincenzio Viviani (che assistè Galileo anziano e cieco negli ultimi 30 mesi della sua vita) compose una biografia (1654) dedicata al maestro in cui colloca la scoperta dell'isocronismo pendolare nel periodo in cui Galileo fu studente a Pisa, probabilmente nel 1583.



Galileo osserva la lampada del Duomo di Pisa (Luigi Sabatelli, 1840), Firenze, Tribuna di Galileo.

Le parole di Viviani

- “In questo mentre [quando Galileo era studente di medicina a Pisa (1581-1584)] con la sagacità del suo ingegno inventò quella semplicissima e regolata misura del tempo per mezzo del pendulo, non prima da alcun altro avvertita, pigliando occasione d’osservarla dal moto d’una lampada, mentre era un giorno nel Duomo di Pisa; e facendone esperienze esattissime, si accertò dell’egualità delle sue vibrazioni, e per allora [gli venne in mente] di adattarla all’uso della medicina per la misura della frequenza [del polso] ...” .
(Opere, XIX, p. 603).

Osservazioni (3)

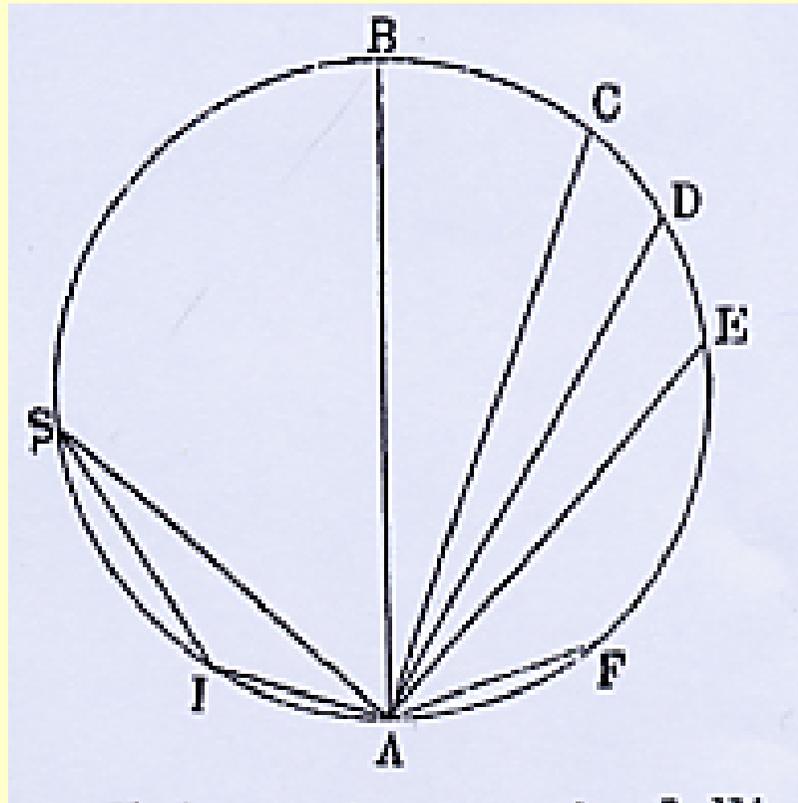
- Quando Viviani scrive, erano da tempo sorte dispute di priorità sull'applicazione del pendolo all'orologio e alla misura della frequenza del battito cardiaco.
- Lo stesso Viviani è personalmente coinvolto in dispute sull'applicazione del pendolo all'orologio.
- Nel 1603 Santorre Santorio, medico, di cui Galileo era stato paziente a Padova, descrisse il “pulsilogium” (pendolo applicato alla valutazione della frequenza cardiaca).
- È probabile che Galileo abbia informato Santorio a Padova dei propri risultati sull'isocronismo e che Santorio abbia avuto l'idea di usarlo per la valutazione della frequenza cardiaca.
- Galileo non rivendicò la paternità del pulsilogium.
- Tutti questi elementi portano a considerare con molta cautela le affermazioni di Viviani e a ritenerle più una costruzione mitica che un reale resoconto degli eventi.

Galileo (1602b): Il teorema delle corde

- Nella lettera del 29-11-1602 a Guidobaldo del Monte Galileo dichiara di aver determinato sperimentalmente l'isocronismo del pendolo, ma di non essere in grado di dimostrare matematicamente questa proprietà.
- Nella stessa lettera afferma di essere già in grado di dimostrare che il moto di caduta lungo le corde di una circonferenza verticale impiega lo stesso tempo indipendentemente dalla corda percorsa.
- Non riporta però la dimostrazione.

La situazione

- Un corpo cade lungo le corde AF, AE, AD, AC, AB esattamente nello stesso tempo.
- Il risultato è verò (si può dimostrare con la meccanica newtoniana ... che Galileo però non possedeva!).



La connessione tra discesa lungo le corde e moto del pendolo

- Sappiamo dalla lettera a Guidobaldo del 29-11-1602 che Galileo non era in grado di dimostrare l'isocronismo pendolare lungo la traiettoria circolare.
- È molto plausibile che gli sia venuto in mente di studiare prima il moto lungo le corde di una circonferenza nella speranza di poter poi approssimare la circonferenza con una serie di corde.
- Non conosciamo il percorso esatto di Galileo ma questa è una via plausibile.
- Comunque sia, nel periodo della lettera a Guidobaldo il problema della discesa lungo le corde è impostato chiaramente e Galileo sostiene di avere la dimostrazione dell'uguaglianza del tempo di caduta lungo tutte le corde.

Galileo (~1604): Misure sperimentali di confronto tra moto pendolare e moto di discesa lungo il diametro (corda massima) di una circonferenza verticale, con sensibilità 1/90 di secondo

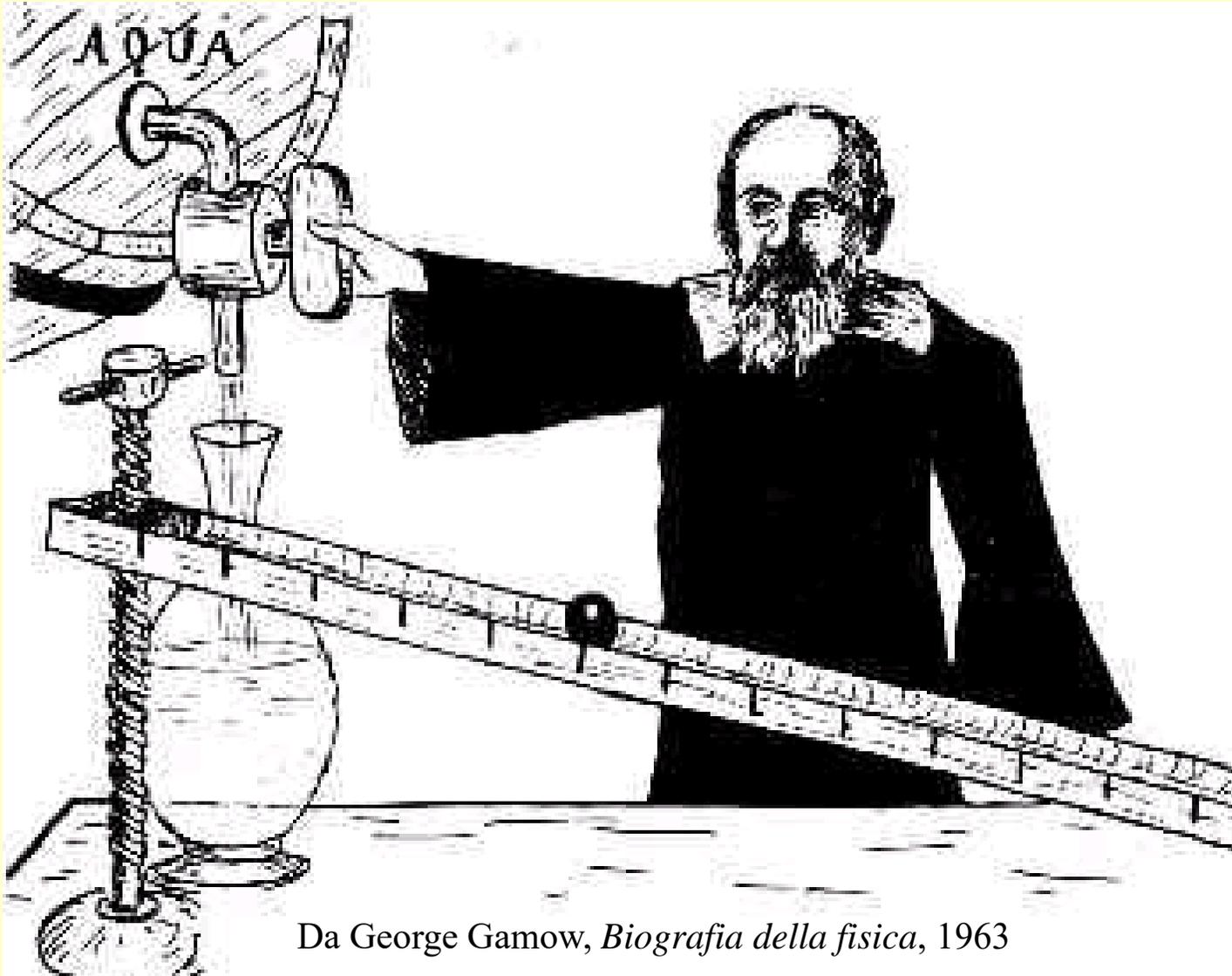
La matematica che non c'è ancora...

- Il pendolo si muove su una traiettoria curva e non esiste ancora la matematica adatta a trattare questo problema.
- Galileo si muove in questa difficile situazione sfruttando abilmente i risultati e i metodi che ha a disposizione...
- ... integrandoli con nuove tecniche sperimentali (secondo Stillman Drake, l'orologio ad acqua, realizzato da Galileo già nel periodo padovano, ca. 1604).

La via sperimentale indicata dal teorema delle corde

- Il diametro verticale cb di una circonferenza è una corda particolare.
- Una piccola corda ab , con b coincidente con l'estremo inferiore del diametro verticale cb , sembra una buona approssimazione per il piccolo arco di circonferenza ab lungo cui il pendolo si muove.
- Per il teorema delle corde, dovrebbe allora essere vero che il tempo di caduta libera lungo il diametro cb è uguale alla quarta parte $T/4$ del periodo di oscillazione T di un pendolo di lunghezza pari alla metà del diametro.
- Si crea in questo modo un legame che è naturale indagare tra il tempo di caduta lungo il **diametro verticale** di una **circonferenza di raggio r** e il periodo di oscillazione di un **pendolo di lunghezza r** .

Stillman Drake ha argomentato che Galileo avesse l'orologio ad acqua (descritto solo nel 1638) già nel periodo padovano...



Da George Gamow, *Biografia della fisica*, 1963

Un confronto dei due tempi individuato da Drake in due fogli separati: 189v e 154v

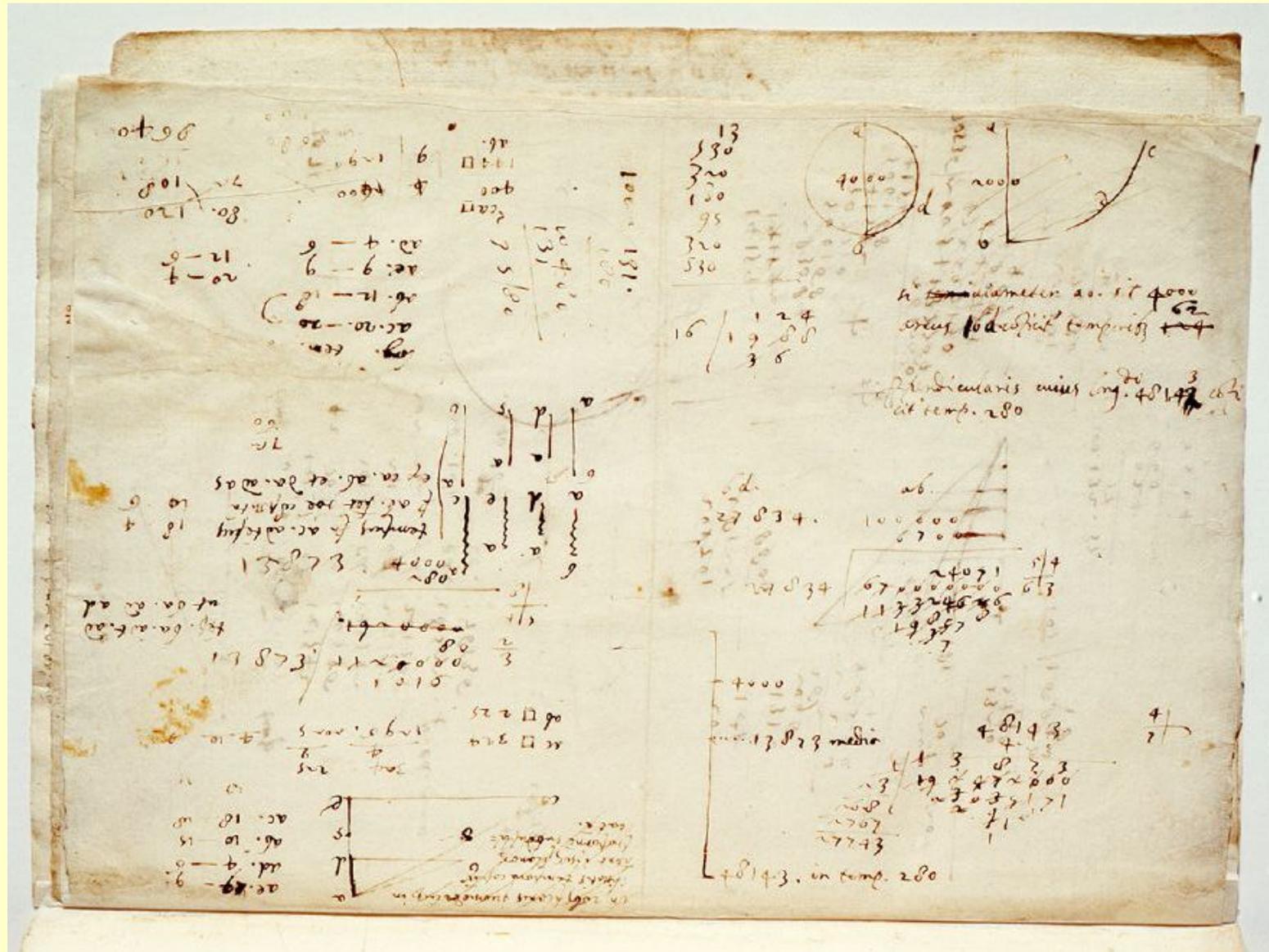
- Nei manoscritti 189v e 154v Stillman Drake ha individuato un confronto tra la caduta verticale su una distanza $2r$ e il periodo di un pendolo di lunghezza r .
- Il confronto è reso possibile secondo Drake da un sofisticato e preciso metodo che Galileo inventa per misurare il tempo.
- Si tratta del famoso **orologio ad acqua** che Galileo descrive molto più tardi nei *Discorsi* (1638), ma che secondo Drake egli aveva messo a punto già nel 1604.

Il brano sulla misura del tempo, 34 anni dopo nei *Discorsi*

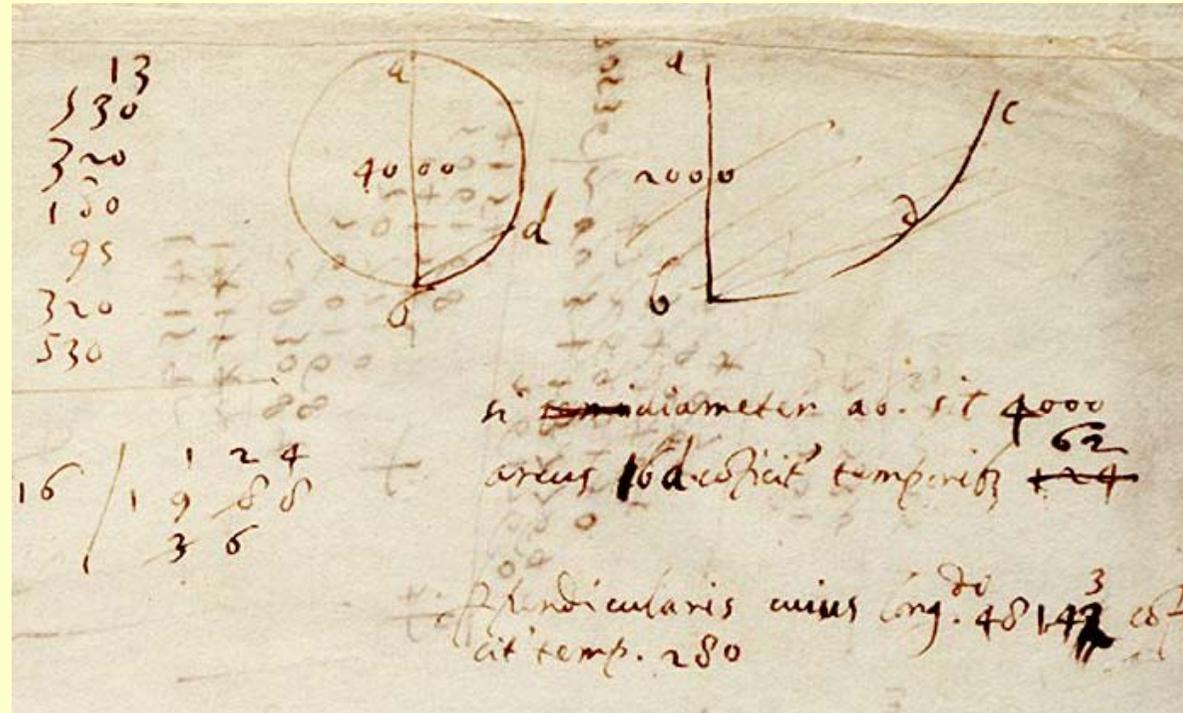
20 assegnata e dimostrata dall'Autore. Quanto poi alla misura del tempo, si teneva una gran secchia piena d'acqua, attaccata in alto, la quale per un sottil cannellino, saldatogli nel fondo, versava un sottil filo d'acqua, che s'andava ricevendo con un piccol bicchiere per tutto 'l tempo che la palla scendeva nel canale e nelle sue parti: le particelle poi dell'acqua, in tal guisa raccolte, s'andavano di volta in volta con esattissima bilancia pesando, dandoci le differenze e proporzioni de i pesi loro le differenze e proporzioni de i tempi; e questo con tal giustezza, che, come ho detto, tali operazioni, molte e molte volte replicate, già mai non differivano d' un notabil
30 momento.

Discorsi, giornata III, Opere di Galileo, vol. 8, p. 213.

Il manoscritto 189v



Il diagramma in 189v per il confronto tra T/4 di un pendolo di lunghezza r e la caduta lungo il diametro verticale di lunghezza $2r$



“si (cancellatura) diameter ab sit 4000, arcus (cancellatura) bd conficitur temporibus 62” (dal sito del Max Planck):

“Se il **diametro** ... è come **4000 [punti]**,
l'**arco** ... bd si percorre in **62 tempi**”

Cioè il confronto tra T/4 di un pendolo di lunghezza 2000 punti e la caduta libera verticale per un tratto di 4000 punti

- Galileo usa anche in altri luoghi il punto come misura di lunghezza.
- Drake valuta 1 punto = 0,94 mm (p. 139).

Il calcolo di T/4 con l'orologio ad acqua eseguendo pesate multiple

- La colonna in alto a sinistra vicino al diagramma di 189v riporta i numeri 13, 530, 320, 180, 95, 320, 530.
- Drake interpreta questi numeri come pesi (espressi in “grani”, unità dell'epoca) di pesate multiple.
- Le pesate più grandi (530, 320 e forse 180) eseguite riempiendo recipienti per non sovraccaricare la bilancia di precisione.
- 13 grani: l'acqua che bagna le pareti (pesando il recipiente asciutto e poi bagnato).
- Sommando, si ottiene:
- $13, + 530 + 320 + 180 + 95 + 320 + 530 = 1988$
(grani di peso).

Il calcolo dei “tempi” ponendo 1 “tempo” corrispondente al peso di 16 grani d’acqua

- Sotto la colonna dei numeri che sommati danno 1988 grani, si trova la divisione $1988/16 = 124$.
- Nella frase riportata sopra Galileo scrive prima 124, poi lo cancella e sovrascrive 62.
- Secondo Drake, Galileo ha prima calcolato $T/2$ e poi è passato a $T/4 = 124/2 = 62$ tempi.

Quanto vale il “tempo” di Galileo?

- Esaminando i calcoli di Galileo, Drake conclude che Galileo usava i sistemi di pesata precisa utilizzati dai farmacisti.
- 1 oncia = 480 “grani”.
- 1 “tempo” = 16 grani = 1/90 secondo (p. 140).
- Per avere un’idea, Drake calcola che il flusso era di circa 3 once al secondo e che 1 “tempo” corrisponde alla discesa di circa circa 1 grammo d’acqua.

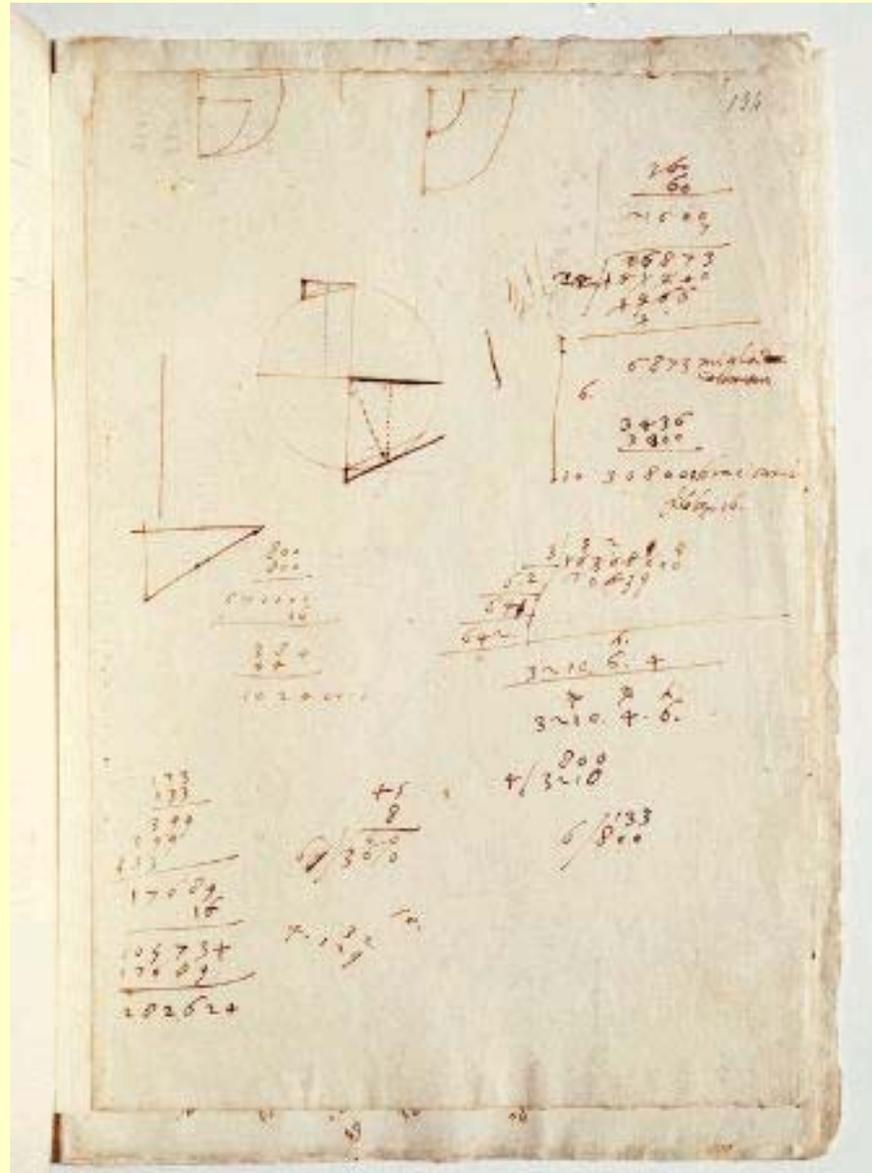
I risultati di Galileo con il suo potente metodo cronometrico: non vale l'approssimazione arco-corda suggerita dal teorema delle corde

- Secondo Drake, Galileo sfrutta in modo molto efficace il potente metodo cronometrico che si è costruito.
- Drake argomenta che Galileo trova che l'uguaglianza che si aspetta tra $T/4$ del pendolo di lunghezza r e la caduta verticale sulla distanza $2r$ **non** è verificata.
- Cioè 62 tempi \neq dal tempo di caduta verticale su un tratto di 4000 punti.

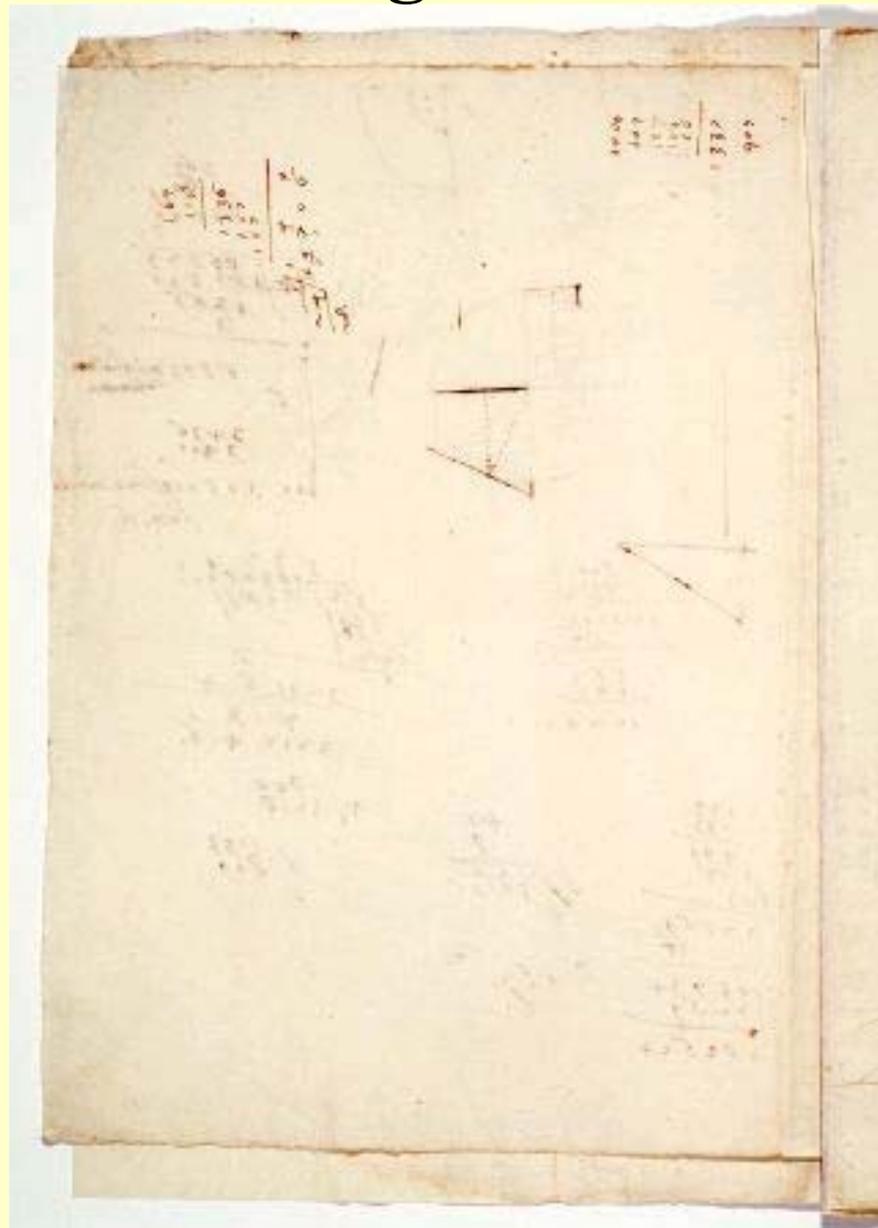
Il calcolo del tempo di caduta sul diametro lungo 4000 punti nel foglio 154v

- Drake ha considerato un altro foglio che contiene calcoli relativi al moto pendolare, il foglio 154.

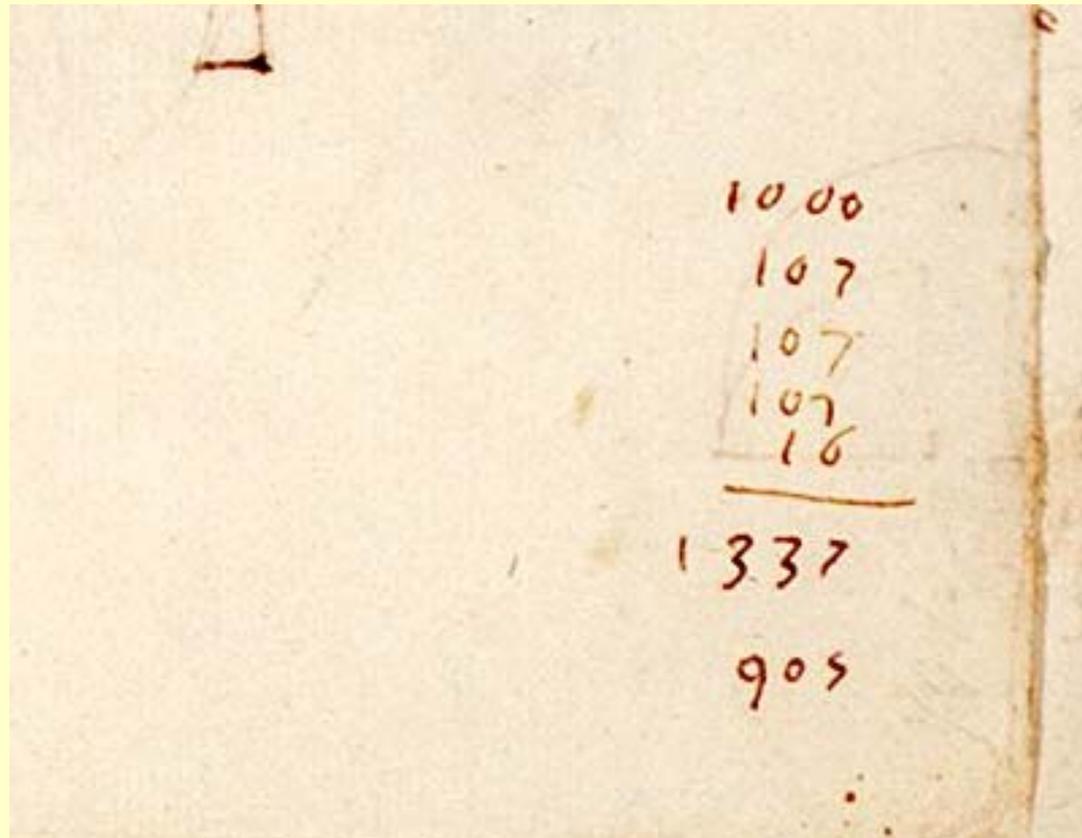
Il foglio 154r



Il foglio 154v



I calcoli in 154v considerati da Drake



Calcolo del tempo di caduta con l'orologio ad acqua eseguendo pesate multiple

- Drake considera la somma:
$$1000 + 107 + 107 + 107 + 16 = 1337.$$
- Divisa per 16, come nel caso precedente, si ottiene $1337/16 = 83,5$ tempi.
- 83,5 coincide secondo Drake, con un errore di 0,05 secondi, con il tempo di caduta di un grave a Padova per un tratto verticale pari a 4000 punti...

Cioè, in definitiva...

- $T/4 = 62$ tempi (pendolo di raggio r)
- $T_{2r} = 83,5$ tempi (tempo caduta verticale per un tratto $2r$).
- $T/4 \neq T_{2r}$ ($62 \neq 83,5$).
- Cioè nel moto pendolare **non** vale l'approssimazione dell'arco con la corda, come Galileo sperava.
- 1 “tempo” = 16 grani = $1/90$ secondo.

Osservazioni

- Notare lo straordinario livello di precisione sperimentale che Galileo raggiunge.
- Non vale l'approssimazione sperata dell'arco del pendolo con la corda sottesa, ma, strada facendo, Galileo elabora metodi cronometrici sperimentali di notevole potenza.