

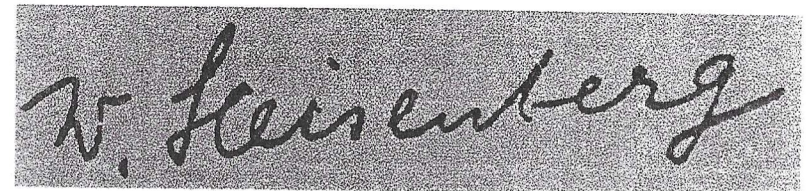
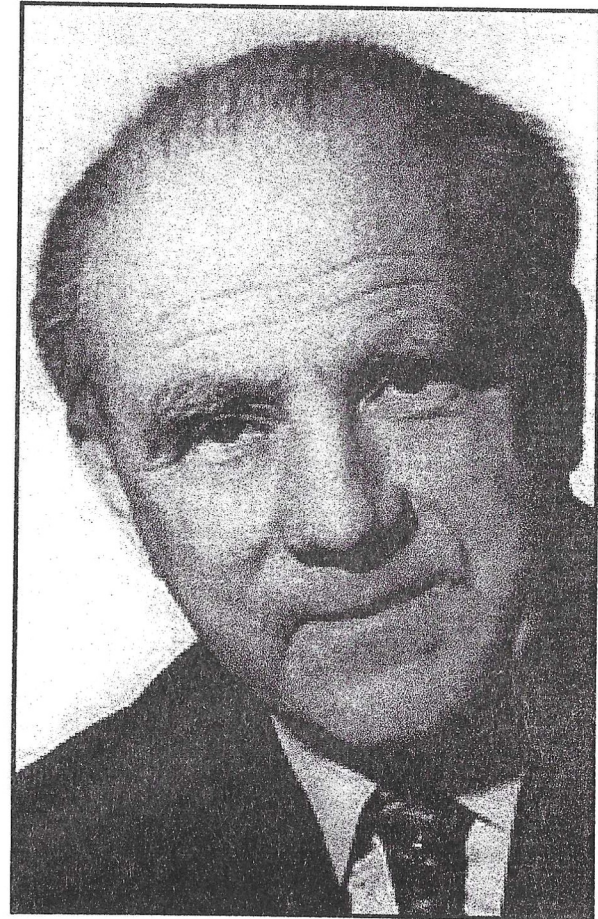
Il principio di indeterminazione

•
Sigfrido Boffi

Università di Pavia
•

- ⊙ lo statuto della fisica classica
 - spazio delle fasi
 - ⊙ da Laplace a Heisenberg
 - principio di causalità
 - ⊙ osservabili compatibili e non
 - osservazioni successive
 - ⊙ completezza della meccanica quantistica
 - paradosso EPR
 - disuguaglianze di Bell
 - ⊙ un nuovo statuto della fisica
-

Werner Karl Heisenberg (1901–1976)



Isaac Newton (1642–1727)

Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica

1687

Lex I

Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

Lex II

Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

Lex III

Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi.

- La I legge definisce il **sistema di riferimento** (inerziale).
- La II legge afferma un **principio di causalità**.
- La III legge **riduce** la dinamica di un sistema di molte particelle alle loro mutue interazioni.

statuto della fisica:

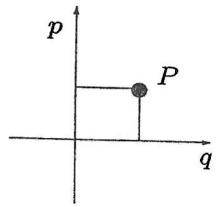
riduzionismo: le proprietà globali sono univocamente determinate dalle interazioni tra i componenti elementari;

determinismo: la situazione iniziale determina univocamente il comportamento futuro;

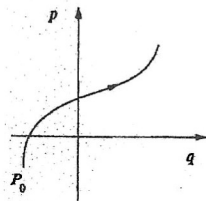
descrizione oggettiva: le leggi della fisica descrivono il moto dei corpi, indipendentemente dall'osservatore che è un semplice spettatore.

N.B. **reversibilità del tempo:** le equazioni del moto sono invarianti se si scambia t in $-t$.

spazio delle fasi

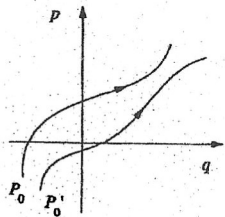


atto di moto \Leftrightarrow punto P

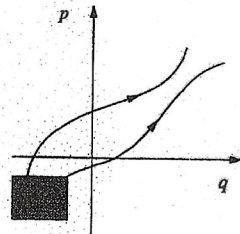


evoluzione temporale \Leftrightarrow traiettoria

condizioni iniziali \Leftrightarrow punto P_0



a condizioni iniziali distinte
corrispondono traiettorie
che non si intersecano mai



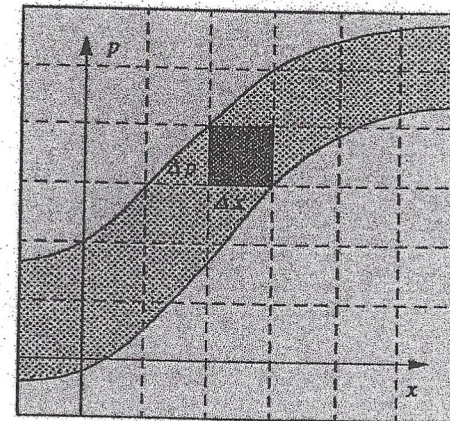
conoscenza approssimata
delle coordinate (q, p) iniziali
non permette di prevedere
quale traiettoria viene percorsa

Sigfrido Boffi

Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica

DA LAPLACE A HEISENBERG

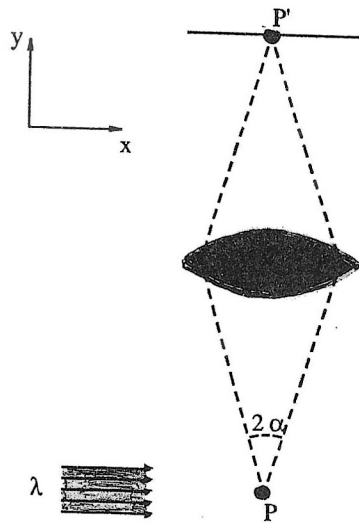
Un'introduzione alla meccanica quantistica
e alle sue applicazioni



QUADERNI DI FISICA TEORICA

<http://www.pv.infn.it/~boffi/libro.html>

LOCALIZZAZIONE DELL'ELETTRONE

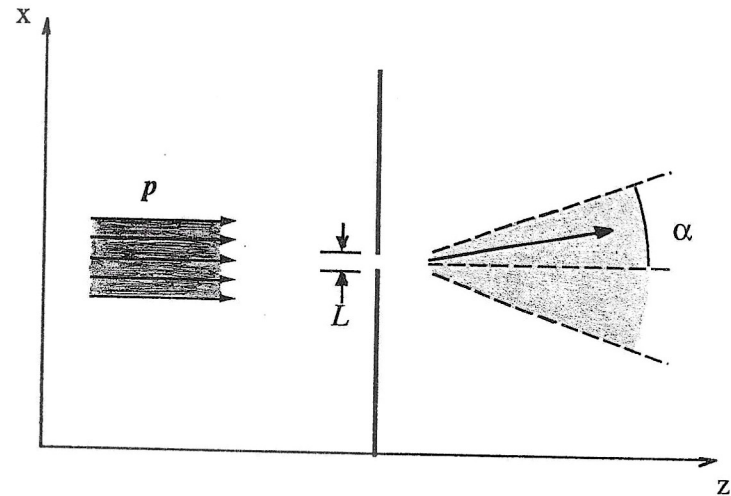


$$\Delta x \sim \frac{\lambda}{\sin \alpha}$$

$$\Delta p_x \sim p \sin \alpha = \frac{h}{\lambda} \sin \alpha$$

$$\Delta x \Delta p_x \sim h$$

DIFFRAZIONE DEGLI ELETTRONI



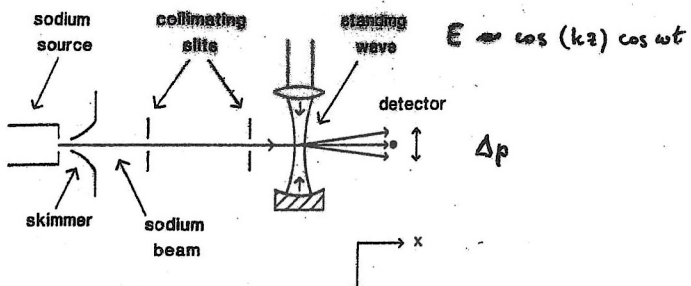
$$\sin \alpha \sim \frac{\lambda}{L}, \quad L = \Delta x$$

$$\Delta p_x \sim p \sin \alpha = \frac{h}{\lambda} \sin \alpha$$

$$\Delta x \Delta p_x \sim h$$

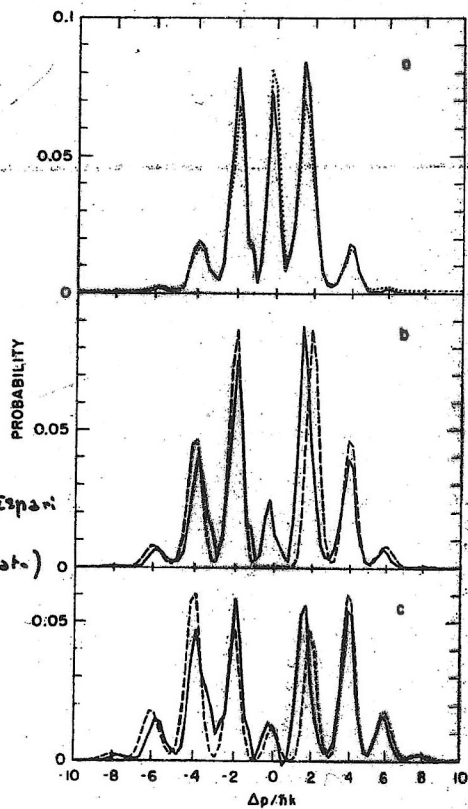
Effetto Kapitza-Dirac

(Proc. Cambridge Phil. Soc. 29 (1933) 297)



P.E. Moskowitz et al. J. Opt. Soc. Am. 72 (1985) 1784

P.L. Gould et al. P.R.L. 56 (1986) 827



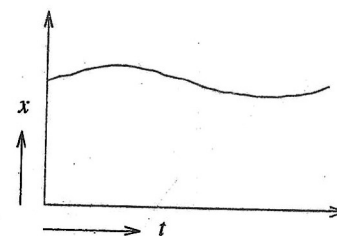
$P_n < 10^{-20}$, n dispari
(Na finale eccitato)

— osservato
- - - - - calcolato

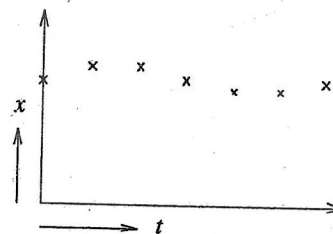
$\Delta p = n \hbar k$

POSIZIONE, VELOCITÀ

In una teoria del continuo



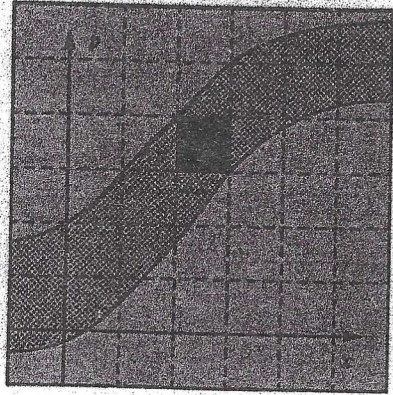
In una teoria del discreto



In questo caso è chiaramente privo di senso parlare di velocità in un punto determinato, perché la velocità in primo luogo è definita da due posizioni e poi perché viceversa a ogni punto appartengono così due valori discreti di velocità.

W. Heisenberg : Zs. f. Phys. 43 (1927) 172

$$\Delta p \Delta q \sim h \quad (1)$$

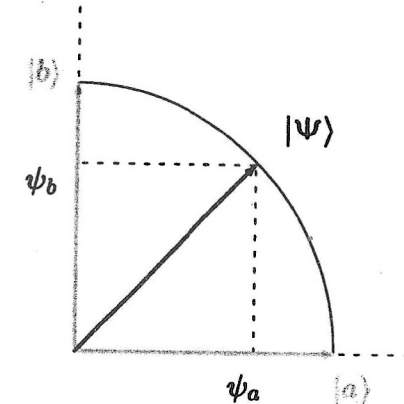


... in tutti i casi in cui nella teoria classica esistono relazioni tra grandezze che sono realmente misurabili in modo assolutamente esatto, anche in teoria quantistica valgono le corrispondenti relazioni esatte (leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia). Ma nella formulazione netta del principio di causalità: "se conosciamo in modo preciso il presente, possiamo prevedere il futuro", non è falsa la conclusione, bensì la premessa. In linea di principio noi non possiamo conoscere il presente in tutti i suoi dettagli. Perciò ogni osservazione è una scelta all'interno di una completezza di possibilità, con restrizione di possibilità future. Dato che ora il carattere statistico della teoria quantistica è così strettamente collegato con l'imprecisione di tutte le osservazioni, si potrebbe essere indotti a supporre che dietro al mondo statistico percepito si nasconda un mondo "reale" in cui valga il principio di causalità.

La fisica deve descrivere formalmente solo il complesso delle osservazioni. Anzi, i fatti reali possono essere meglio caratterizzati così: siccome tutti gli esperimenti sono soggetti alle leggi della meccanica quantistica e quindi all'equazione (1), mediante la meccanica quantistica viene stabilita definitivamente la non validità del principio di causalità.

Lo spazio degli stati quantistici (di Hilbert)

- polarizzazione della luce: due stati indipendenti
- spin dell'elettrone: due orientazioni (Stern-Gerlach)
- ⊙ principio di sovrapposizione lineare
- ⇒ stato quantistico = vettore $|\Psi\rangle$



$\{|a\rangle, |b\rangle\}$ = vettori di base

$$|\Psi\rangle = \psi_a |a\rangle + \psi_b |b\rangle$$

ψ_a (ψ_b) = ampiezza di probabilità che una misurazione fornisca lo stato $|a\rangle$ ($|b\rangle$)

N.B. in generale spazio vettoriale complesso a infinite

$$\text{dimensioni: } |\Psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle$$

Rappresentazioni

$$|\Psi\rangle = \psi_a |a\rangle + \psi_b |b\rangle$$

il vettore $|\Psi\rangle$ è noto quando sono note le sue componenti $\{\psi_a, \psi_b\}$ sulla base $\{|a\rangle, |b\rangle\}$

il vettore $|\Psi\rangle$ è rappresentato dalle sue componenti $\{\psi_a, \psi_b\}$

in uno spazio a infinite dimensioni

$$|\Psi\rangle = \int dx \psi(x) |x\rangle$$

il vettore $|\Psi\rangle$ è rappresentato dalla funzione d'onda $\psi(x)$.

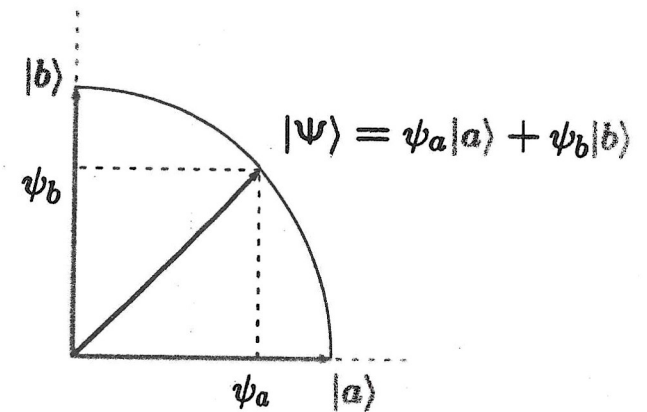
quando $\{|x\rangle\}$ è la base dell'osservabile posizione e lo stato dipende dal tempo:

$$|\Psi(t)\rangle = \int dx \psi(x, t) |x\rangle$$

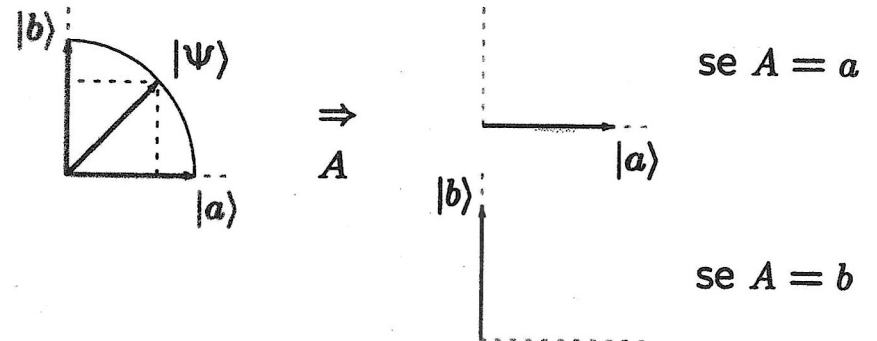
la funzione d'onda $\psi(x, t)$ è l'ampiezza di probabilità di trovare la particella in x all'istante t

la funzione d'onda $\psi(x, t)$ soddisfa l'eq. di Schrödinger:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H \psi(x, t)$$



osservare = proiettare



Principio di indeterminazione

Werner Karl Heisenberg (1901–1976)

Zs. f. Phys. 43 (1927) 172–198

- misura di $A \Rightarrow$ autostato di A
- successiva misura di $B \Rightarrow$ autostato di B
- in generale: autostato di $B \neq$ autostato di A

\Rightarrow **misura di B fa perdere informazione su A !!**

N.B. in fisica classica

misura di B arricchisce informazione

ottenuta con la misura di A !!

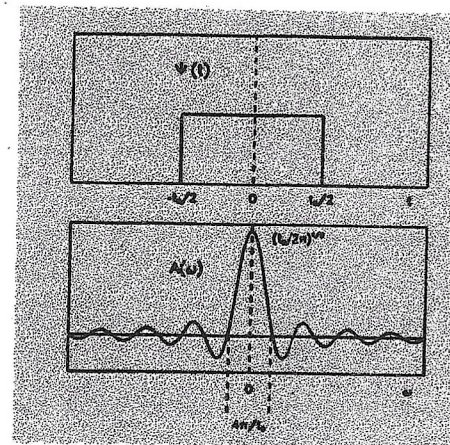
p.es. posizione x e impulso p

$$\Delta x \Delta p \gtrsim \frac{1}{2} \hbar$$

Relazione di indeterminazione per energia e tempo

$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int d\omega A(\omega) e^{-i\omega t}, \quad \int dt |\Psi(t)|^2 = 1$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dt \Psi(t) e^{i\omega t}, \quad \int d\omega |A(\omega)|^2 = 1$$



larghezza di banda: $(\Delta\omega)^2 = \int d\omega (\omega - \langle\omega\rangle)^2 |A(\omega)|^2$

durata del segnale: $(\Delta t)^2 = \int dt (t - \langle t\rangle)^2 |\Psi(t)|^2$

$$\Delta\omega \Delta t \gtrsim \frac{1}{2}$$

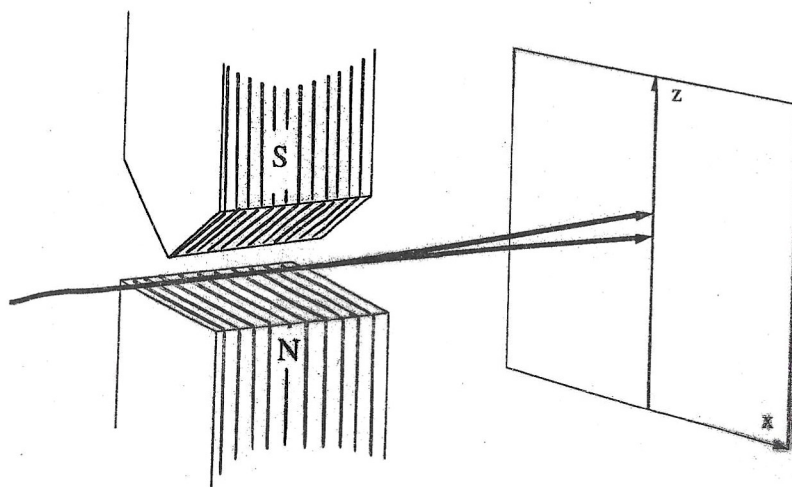
ma $E = \hbar\omega \Rightarrow \Delta E \Delta t \gtrsim \frac{1}{2} \hbar$

ESPERIMENTO DI STERN-GERLACH

e la quantizzazione spaziale

del momento angolare

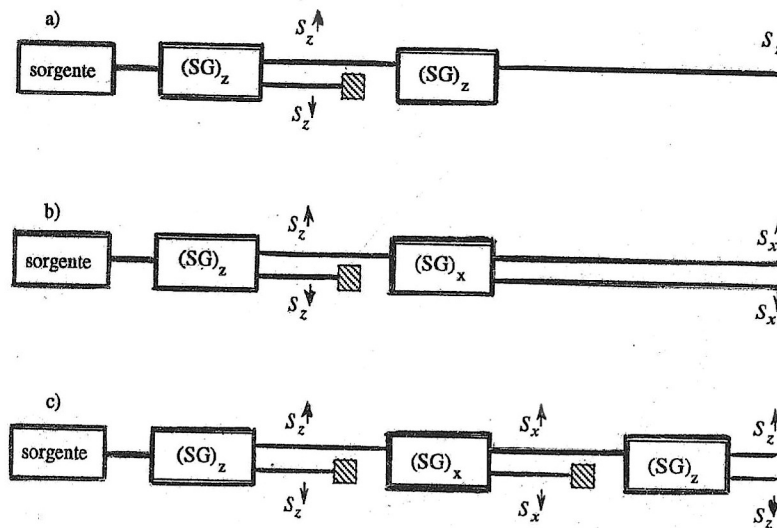
(SPIN)



$$F_z = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z}$$

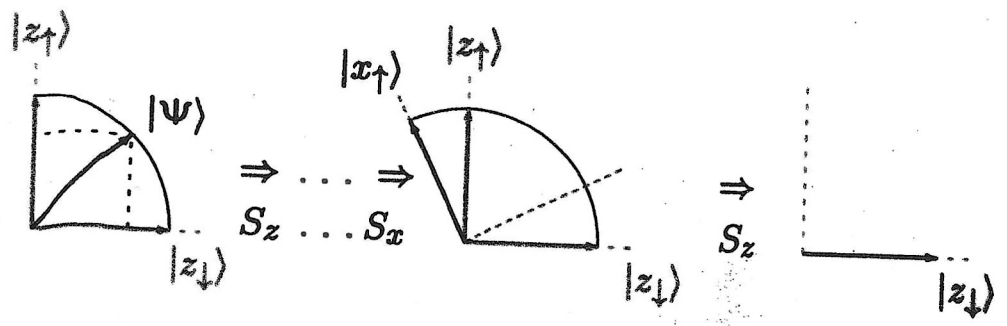
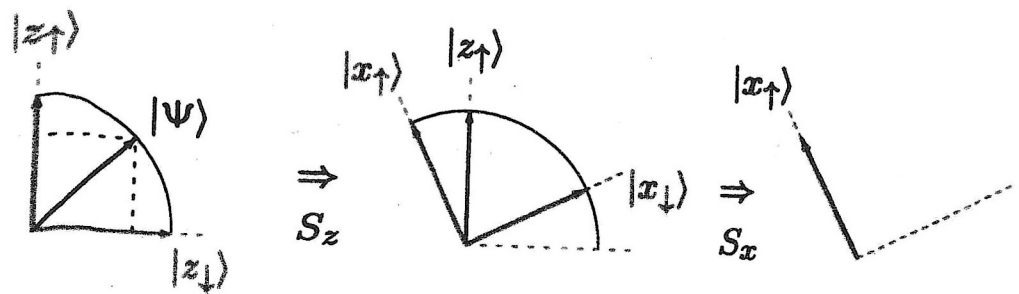
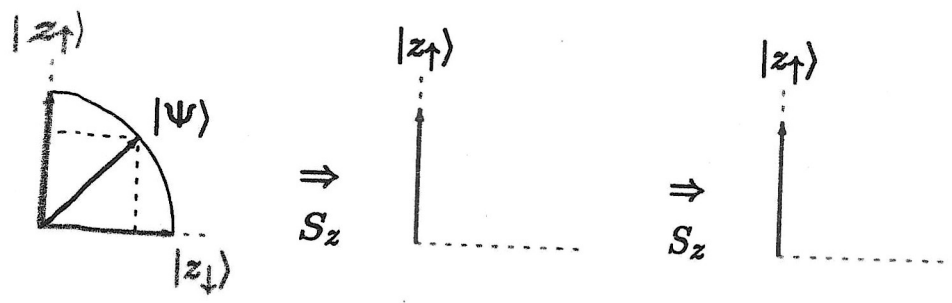
O. Stern, W. Gerlach: Zs. f. Phys. 8 (1921) 110
9 (1922) 349

ESPERIMENTI DI STERN-GERLACH SEQUENZIALI



- b) significa che la componente S_z^\uparrow è composta metà da una componente S_x^\uparrow e metà da una componente S_x^\downarrow ?
- la selezione della componente S_x^\uparrow da parte del secondo dispositivo $(SG)_x$ distrugge ogni precedente informazione su S_z !

Osservazioni successive

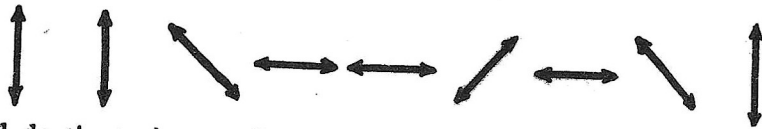


W.E. Hill, 1945 "Mia moglie e mia suocera"
 ovvero delle osservabili non compatibili

C.H. Bennet, G. Brassard, A.K. Ekert:
Le Scienze, n. 292, dicembre 1992, pp. 84-93

Scambio di messaggi in assoluta segretezza

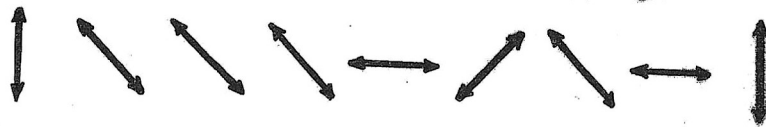
Il mittente invia fotoni polarizzati scelti a caso:



Il destinatario sceglie a caso il tipo di misurazione:



Il destinatario registra i risultati, ma li tiene segreti:

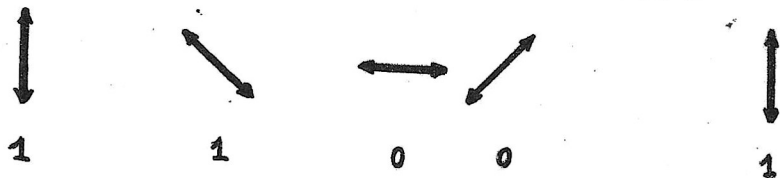


Il destinatario annuncia il tipo di misurazione eseguito.

Il mittente gli dice quali misurazioni erano del tipo corretto:



Tutti i casi in cui il destinatario ha eseguito la misurazione corretta, tradotti in bit (1 e 0), diventano la chiave:



Il paradosso EPR

A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen:
Phys. Rev. 47 (1935) 777-780

- **Principio di realtà**
Se, senza intervenire sul sistema, è possibile prevedere con certezza il valore di un'osservabile, a questa corrisponde una proprietà oggettiva del sistema.
- **Principio di località (o separabilità)**
Le proprietà di un sistema non possono essere influenzate da una misurazione eseguita su un altro sistema non interagente con esso.
- **Completezza della meccanica quantistica**
L'aspetto probabilistico non è legato all'esistenza di variabili nascoste nella descrizione quantistica.



Conosco $x_1 - x_2$ e $p_1 + p_2$

- Misuro x_1 → posso prevedere x_2
- Misuro p_1 → posso prevedere p_2

Il teorema di Bell

- ⊙ $\lambda =$ variabile nascosta
- ⊙ $\rho(\lambda) =$ distribuzione di probabilità
- ⊙ $A = \pm 1, B = \pm 1, |A(\hat{a}, \lambda)| \leq 1, |B(\hat{b}, \lambda)| \leq 1$
- ⊙ $E(\hat{a}, \hat{b}) =$ probabilità congiunta

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = \int d\lambda \rho(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda)$$

$$\begin{aligned} E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}') &= \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) - A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}', \lambda)] \\ &= \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) (1 \pm A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}', \lambda))] \\ &\quad - \int d\lambda \rho(\lambda) [A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}', \lambda) (1 \pm A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}, \lambda))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}')| &\leq \int d\lambda \rho(\lambda) (1 \pm A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}', \lambda)) \\ &\quad + \int d\lambda \rho(\lambda) (1 \pm A(\hat{a}', \lambda) B(\hat{b}, \lambda)) \\ &= 2 \pm (E(\hat{a}', \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b})) \end{aligned}$$

$$-2 \leq S \leq 2$$

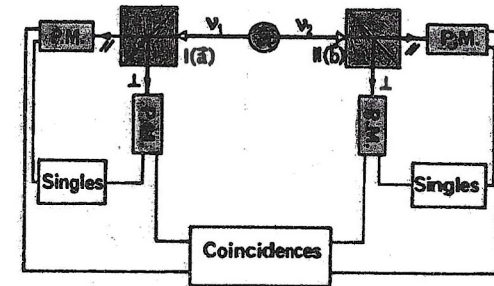
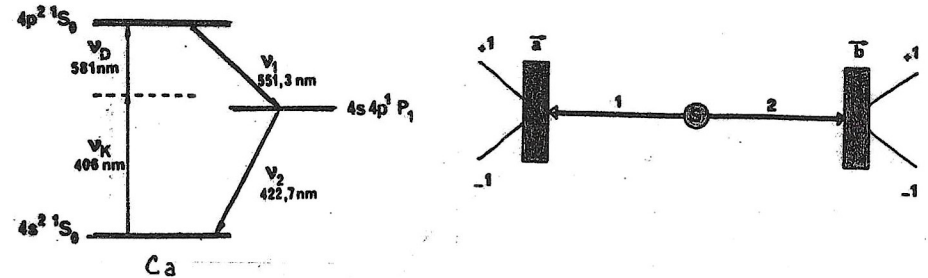
$$S = E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b}) + E(\hat{a}', \hat{b}')$$

Per particelle a spin $\frac{1}{2}$ in meccanica quantistica è

$$E(\hat{a}, \hat{b}) = c \hat{a} \cdot \hat{b} \implies S_{QM} \rightarrow 2\sqrt{2}c$$

Violazione delle disuguaglianze di Bell

A. Aspect, P. Grangier, G. Roger:
Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 91-94



$$E(\hat{a}, \hat{b}) = P_{++}(\hat{a}, \hat{b}) + P_{--}(\hat{a}, \hat{b}) - P_{+-}(\hat{a}, \hat{b}) - P_{-+}(\hat{a}, \hat{b})$$

$$S = E(\hat{a}, \hat{b}) - E(\hat{a}, \hat{b}') + E(\hat{a}', \hat{b}) + E(\hat{a}', \hat{b}')$$

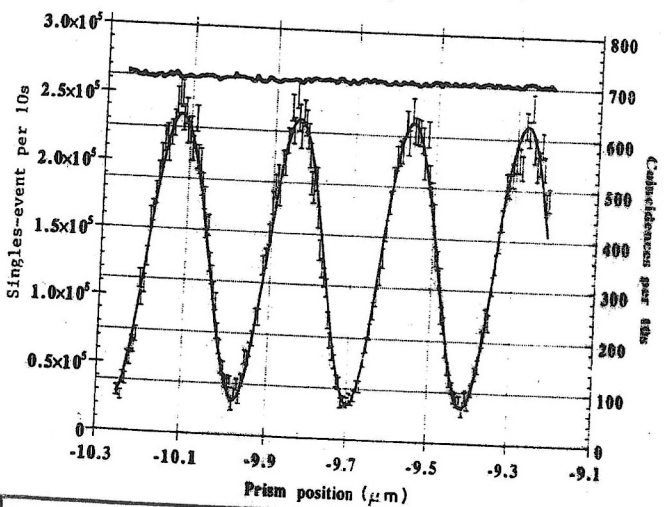
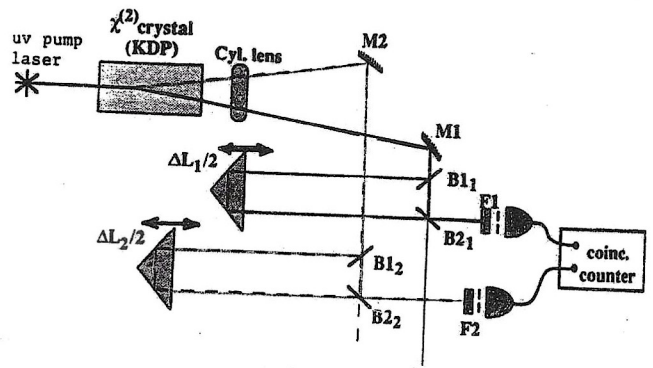
$$(\hat{a}, \hat{b}) = (\hat{b}, \hat{a}') = (\hat{a}', \hat{b}') = 22.5^\circ, \quad (\hat{a}, \hat{b}') = 67.5^\circ$$

$$\text{Bell: } -2 \leq S \leq 2$$

$$S_{\text{exp}} = 2.697 \pm 0.015 \quad \leftrightarrow \quad S_{QM} = 2.70 \pm 0.05$$

Violazione delle disuguaglianze di Bell

P.G. Kwiat, A.M. Steinberg, R.Y. Chiao:
 Phys. Rev. A47 (1993) R2472-R2475



Visibilità: classica	= 50%
Bell	= $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 70.7\%$
exp	= 80.4%

-12-

Realtà oggettiva e realtà percepita

● La realtà che soggiace ai fenomeni osservabili con l'occhio della scienza presenta un insieme di potenzialità che, secondo la fisica quantistica, non possono essere esplorate tutte simultaneamente e che si attuano piuttosto di volta in volta solo nel rapporto con l'osservatore quando si viene a formare il fenomeno

dualismo onda-corpuscolo \Leftrightarrow **principio di sovrapposizione lineare**

\Rightarrow si mescolano situazioni antagoniste per il senso comune

● l'osservatore non è solo spettatore: ha un ruolo attivo nel formare il fenomeno

fenomeno = **Incontro tra osservato e osservatore**

● La realtà della quale possiamo parlare non è mai la

realtà in sé

ma è una realtà dovuta alla nostra presa di coscienza o perfino, in molti casi, da noi configurata: una

realtà percepita

● Comprendere la natura implica stabilire le connessioni (**leggi**) tra fenomeni diversi e riconoscere un certo ordine che regola un gruppo di fenomeni riconducendoli a un unico principio

realtà oggettiva della scienza perché e in quanto **legalità**

lo statuto della fisica viene ribaltato

realità oggettiva e realtà percepita

(un nuovo statuto)

riduzionismo ↔ non località

determinismo ↔ indeterminazione

descrizione oggettiva ↔ osservatore