

Università degli Studi di Pavia  
**CENTRO DI STUDI PER LA DIDATTICA  
DELLA FACOLTA' DI SCIENZE**  
via Bassi, 6 27100 PAVIA tel. 0382 507471

**A.I.F.**  
**SEZIONE DI PAVIA**  
via Bassi, 6 tel. 0382 507471

**XXV CORSO DI AGGIORNAMENTO IN FISICA  
ANNO 2002  
"ESPERIENZE E APPLICAZIONI DI FISICA MODERNA"**

Giuseppe Giuliani

Descrizione ondulatoria e corpuscolare della luce e della materia

Pavia - Autunno 2002

# Lineamenti di elettromagnetismo

*Giuseppe Giuliani*

*Ilaria Bonizzoni*

Dipartimento di Fisica A. Volta

Università degli Studi di Pavia

Anno Accademico 2000 - 2001

[giuliani@fisicavolta.unipv.it](mailto:giuliani@fisicavolta.unipv.it) [bonizzoni@fisicavolta.unipv.it](mailto:bonizzoni@fisicavolta.unipv.it)

[http://matsci.unipv.it/percorsi/didattica\\_it.htm](http://matsci.unipv.it/percorsi/didattica_it.htm)

## 5.2 Interferenza con elettroni

*Questa onda, la cui velocità è maggiore di  $c$ , non può corrispondere a un trasporto di energia; la considereremo solamente come un'onda fittizia associata al moto della particella.*

Louis de Broglie

*A causa di queste somiglianze tra la diffusione di elettroni da parte del cristallo e la diffusione di onde da parte di reticoli tri - e bidimensionali, una descrizione della occorrenza e del comportamento di raggi di diffrazione di elettroni in termini di una equivalente radiazione ondulatoria da parte degli atomi del cristallo, e la loro susseguente interferenza, non solo è possibile, ma è la più semplice e naturale. Questo implica l'associazione di una lunghezza d'onda al fascio di elettroni incidente, e questa lunghezza d'onda appare in accettabile accordo con il valore  $h/mv$  della meccanica ondulatoria, la costante d'azione di Planck divisa per la quantità di moto dell'elettrone.*

Clinton Davisson and Lester Germer

Nel 1923, Louis de Broglie propose di associare ad una particella di massa  $m$  un'onda fittizia<sup>4</sup> la cui lunghezza d'onda  $\lambda$  è legata alle proprietà della particella dalla relazione:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

dove  $h$  è la costante di Planck e  $p$  la quantità di moto della particella. La proposta di de Broglie ha progressivamente condotto ad una descrizione del comportamento delle particelle mediante un formalismo ondulatorio: la meccanica quantistica *ondulatoria* di Schrödinger ne è un esempio.

<sup>4</sup>Questo è il termine usato da De Broglie. Il lavoro di De Broglie cui ci riferiamo ('Ondes et quanta', *Comptes Rendus*, 177, (1923), 507 - 510) è consultabile in rete: <http://www.davis-inc.com/physics/index.shtml>

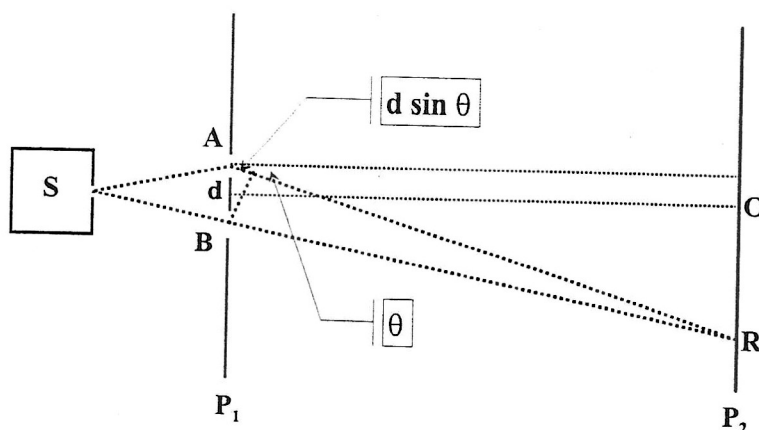


Figura 5.22: esperimento di interferenza con elettroni, analogo a quello con onde elettromagnetiche attraverso due fenditure. Si veda il testo.

Nel 1926, Davisson e Germer ottennero figure di diffrazione facendo diffondere un fascio di elettroni da cristalli di nichel.<sup>5</sup> Successivamente (1928), G. P. Thomson, figlio di J.J. Thomson, produsse figure di diffrazione facendo passare un fascio di elettroni attraverso sottili fogli di metallo. Come indicato nel brano di Davisson e Germer riprodotto all'inizio, è possibile descrivere i fenomeni di diffrazione degli elettroni usando l'ipotesi di de Broglie e il modello di Bragg.

E' tuttavia interessante usare anche la descrizione della meccanica quantistica secondo la formulazione dei *cammini* di Feynman.<sup>6</sup> Consideriamo una disposizione sperimentale analoga a quella delle due fenditure discussa per la radiazione elettromagnetica (figura 5.22): la sorgente di luce è sostituita da una sorgente di elettroni aventi tutti approssimativamente la stessa energia e quantità di moto e lo schermo è di natura tale da poter rivelare l'arrivo degli elettroni.

La descrizione si basa sui seguenti postulati:

- A) La probabilità che un elettrone, dopo aver lasciato la sorgente  $S$ , arrivi nel punto  $R$  dello schermo è data dal quadrato del modulo

<sup>5</sup>Si veda la citazione all'inizio di questa sezione.

<sup>6</sup>Questa trattazione è ripresa da: R. Feynman, R. Leighton, M. Sands, *The Feynman lectures on Physics*, vol. II p. 15 - 7, 15 - 14, Addison - Wesley, 1989.

di un numero complesso  $Ce^{i\phi}$  detto *ampiezza di probabilità*. Siano  $C_A e^{i\phi_A}$  e  $C_B e^{i\phi_B}$  le ampiezze di probabilità associate al cammino  $SAR$  e  $SBR$ , rispettivamente.

- B) La probabilità che un elettrone giunga nel punto  $R$  dello schermo attraversando la fenditura  $A$  quando l'altra è chiusa è data dal quadrato del modulo dell'ampiezza di probabilità relativa al cammino  $SAR$ , cioè da  $C_A^2$ . Analogamente, la probabilità che un elettrone giunga nel punto  $R$  dello schermo attraversando la fenditura  $B$  quando l'altra è chiusa, è data dal quadrato del modulo dell'ampiezza di probabilità relativa al cammino  $SBR$ , cioè da  $C_B^2$ .
- C) La probabilità che un elettrone giunga nel punto  $R$  dello schermo quando entrambe le fenditure sono aperte è data dal *quadrato del modulo della somma delle ampiezze relative ai due cammini  $SAR$  e  $SBR$* .

Quando entrambe le fenditure sono aperte, la probabilità che un elettrone arrivi nel punto  $R$  dello schermo dipende dalla loro differenza di fase  $\delta = \phi_A - \phi_B$ . Infatti si ha

$$P = |(C_A e^{i\phi_A} + C_B e^{i\phi_B})|^2 = C_A^2 + C_B^2 + 2C_A C_B \cos \delta$$

Indicata con  $\lambda = h/p$  la lunghezza d'onda associata alle due ampiezze di probabilità ( $p$  è la quantità di moto lineare degli elettroni), si ottiene, procedendo come nel caso della radiazione elettromagnetica, che la differenza di fase tra due cammini simmetrici rispetto alle due fenditure è data da:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$$

Se si suppone che sia  $C_A = C_B$  si ottiene infine:

$$P = 4C_A^2 \cos^2 \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

Il secondo membro di questa equazione è identico al termine che compare al secondo membro dell'equazione (5.11) ricavata a suo tempo per le onde

elettromagnetiche e dovuto a due strisce omologhe delle due fenditure. Abbiamo così indicato come si possa pervenire, per la diffrazione di elettroni, a formule analoghe a quelle ottenute per le onde elettromagnetiche.

La descrizione in termini di ampiezze di probabilità può essere applicata anche ai fotoni. Le due descrizioni dell'interferenza luminosa, classica (elettromagnetismo) e quantistica (ampiezze di probabilità), sono strutturalmente identiche: entrambe utilizzano un formalismo di tipo ondulatorio per descrivere il comportamento statistico di particelle. La tabella 5.1 mostra le corrispondenze tra le due descrizioni.

Classica	↔	Quantistica
$\lambda = c/\nu$	↔	$\lambda = h/p$
Campo elettrico $\vec{E}$	↔	Ampiezza di probabilità $\eta = Ce^{i\phi}$
$\vec{E} = \vec{E}_A + \vec{E}_B$	↔	$\eta = \eta_A + \eta_B$
Densità di energia $\propto E^2$	↔	Probabilità $\propto  \eta ^2$

Tabella 5.1: descrizione classica e quantistica dell'interferenza della radiazione elettromagnetica.

### 5.3 Onde e particelle

*In altri termini non ci sono indicazioni incontrovertibili perché le particelle, microcomponenti della materia, anche alla luce della loro descrizione quantistica, non possano essere considerate dei veri e propri corpuscoli e non delle onde. E' necessario sottolineare questo punto, apparentemente ovvio, dal momento che anche nel mondo scientifico è diffusa la convinzione che tali particelle debbano essere considerate contemporaneamente come corpuscoli e come onde.*

Piero Caldirola

Nella letteratura fisica (ma non solo) si trovano lunghe discussioni sul concetto di onda e di particella e sul cosiddetto *dualismo onda - particella*. Se si parte dal presupposto, *suggerito* dall'intera conoscenza acquisita, che la natura è discreta, allora si deve concludere che nel mondo esistono due tipi di particelle: quelle dotate di massa non nulla (per esempio gli elettroni) e quelle prive di massa (per esempio i fotoni). Le teorie sviluppate per descrivere il loro comportamento, siano esse teorie considerate *classiche* (come la teoria elettromagnetica di Maxwell - Lorentz) o *quantistiche* (come quella che utilizza il concetto di ampiezza di probabilità), *non* descrivono il comportamento di una singola particella: esse, usando concetti e formalismi tipici delle descrizioni ondulatorie, predicono il comportamento statistico di molte particelle.

In letteratura è diffusa l'opinione secondo cui la descrizione quantistica dell'esperimento delle due fenditure presenta elementi di novità rispetto alla descrizione classica, con riferimento al fatto che la teoria non è in grado di stabilire attraverso quale fenditura passino i fotoni (o gli elettroni). Una caratteristica analoga è presente nella descrizione basata sull'elettromagnetismo. Infatti:

- a) La predizione della distribuzione dell'energia sullo schermo è una conseguenza diretta della regola di sovrapposizione vettoriale dei campi, implicita nelle equazioni di Maxwell. In un generico punto  $R$  dello schermo, si sommano i campi elettrici delle porzioni d'onda provenienti dalle due fenditure  $A$  e  $B$ : l'energia depositata nel punto  $R$  risulta proporzionale al quadrato del campo elettrico risultante.
- b) Supponiamo che  $R$  sia un punto di buio, cioè un punto in cui i campi elettrici si sommano in modo da dare un risultante nullo. I campi, provenienti da  $A$  e da  $B$  si incontrano in  $R$ , interferiscono e si annullano. Dove è finita l'energia associata alle due porzioni d'onda (ai due campi)?
- c) Supponiamo che  $R$  sia un punto di massima luce: i campi si sommano in modo tale da dare  $\vec{E}_S = \vec{E}_A + \vec{E}_B = 2\vec{E}_0$ , se si assume che l'ampiezza delle due onde in  $R$  sia la stessa ed uguale ad  $E_0$ .

L'energia depositata in  $R$  è in questo caso proporzionale a  $4E_0^2$ , mentre l'energia associata a ciascuno dei due campi interferenti è proporzionale a  $E_0^2$ : da dove proviene l'eccesso di energia proporzionale a  $2E_0^2$ ?

La teoria prevede correttamente quale è il valore dei campi in un generico punto dello schermo e quale è la distribuzione di energia sullo schermo: non è invece in grado di descrivere quale sia il percorso dell'energia tra le due fenditure e lo schermo e, quindi, quale sia il percorso dell'energia tra la sorgente e lo schermo. Si noti infine come, introducendo l'ipotesi *ad hoc* secondo cui la probabilità che un fotone arrivi nel punto generico  $R$  dello schermo è proporzionale al rapporto fra l'intensità nel punto  $R$  e l'intensità totale sullo schermo, la teoria di Maxwell - Lorentz acquista le stesse capacità predittive della descrizione quantistica.

## 5.4 Effetto Doppler: II

### 5.4.1 Onde piane

Nella trattazione dei fenomeni elettromagnetici nel vuoto basata sul formalismo relativistico si mostra che l'insieme delle quattro grandezze  $(\omega/c, k_1, k_2, k_3)$  costituisce un quadrivettore  $\vec{\mathcal{K}}$ , detto quadrivettore d'onda: le sue componenti si trasformano quindi, passando da un  $SRI$  ad un altro, come le coordinate  $(ct, x, y, z)$  del continuo spazio - temporale. Si consideri ora un'onda luminosa piana osservata nel sistema di riferimento  $K'$  e descritta dal quadrivettore  $\vec{\mathcal{K}}'$ . Si supponga, per semplicità, che la direzione di propagazione dell'onda giaccia nel piano  $(x', y')$ ; sia  $\theta'$  l'angolo che il vettore d'onda tridimensionale  $\vec{k}'$  forma con l'asse  $x'$ . Le componenti di  $\vec{\mathcal{K}}'$  sono allora:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}'_0 &= \frac{\omega'}{c} \\ \mathcal{K}'_1 &= \frac{\omega'}{c} \cos \theta' \\ \mathcal{K}'_2 &= \frac{\omega'}{c} \sin \theta'\end{aligned}$$



$$\mathcal{K}'_3 = 0$$

Si ha pertanto:

$$\mathcal{K}_0 = \Gamma(\mathcal{K}'_0 + B\mathcal{K}'_1) \quad (5.19)$$

$$\mathcal{K}_1 = \Gamma(\mathcal{K}'_1 + B\mathcal{K}'_0) \quad (5.20)$$

$$\mathcal{K}_2 = \mathcal{K}'_2 \quad (5.21)$$

$$\mathcal{K}_3 = \mathcal{K}'_3 \quad (5.22)$$

Siccome  $\mathcal{K}_3 = k_3 = 0$ , anche nel sistema di riferimento  $K$  la direzione di propagazione dell'onda giace nel piano  $(x, y)$ . Dalla (5.19) si ottiene:

$$\omega = \Gamma\omega'(1 + B \cos \theta') \quad (5.23)$$

e dalla (5.20), tenendo conto della (5.23):

$$\cos \theta = \frac{B + \cos \theta'}{1 + B \cos \theta'}$$

Da quest'ultima equazione è possibile dedurre (cambiando le grandezze accentate con quelle non accentate, e viceversa, e sostituendo  $-B$  a  $B$ ) che:

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - B}{1 - B \cos \theta} \quad (5.24)$$

La (5.23) diventa allora:

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - B^2}}{1 - B \cos \theta} \quad (5.25)$$

Questa equazione descrive l'effetto Doppler nel caso di onde periodiche. Si noti che, prescindendo dalla pulsazione  $\omega'$ , tutte le grandezze che vi compaiono sono relative all'osservatore  $K$ : il cosiddetto effetto Doppler trasversale corrisponde al caso in cui  $\theta = \pi/2$ .

### 5.4.2 Fotoni

Si osservi che la derivazione svolta nella precedente sezione può essere applicata, con le opportune varianti, anche al caso dei fotoni trattati

come particelle relativistiche cui si associa il quadrivettore energia - impulso  $\vec{P} = \hbar\vec{K} = (E/c, \vec{p})$  con  $E = h\nu$  e  $|\vec{p}| = h\nu/c$ . Si vede dunque che, all'interno dell'approccio adottato, la descrizione della radiazione in termini di onde o di fotoni conduce allo stesso risultato: questo, peraltro, coincide con quello ottenuto mediante l'esperimento ideale con lampi di luce periodicamente intervallati. E' essenziale rendersi conto che i tre casi trattati hanno in comune il fatto che viene ignorato il processo di emissione da parte della sorgente.

#### 5.4.4 Fotoni emessi da atomi o da nuclei

Quando si prende in considerazione il processo di emissione della radiazione da parte della sorgente, non si può prescindere dal fatto che tale processo è discreto e direzionale. Si consideri l'emissione di un fotone da parte di un atomo in moto rispetto al sistema di riferimento dell'apparato di misura (figura 5.24). Siano:

- $E_1, E_2$  l'energia a riposo dell'atomo prima e dopo l'emissione;
- $v_1, v_2$  la velocità dell'atomo prima e dopo l'emissione;
- $\theta_1, \theta_2$  l'angolo che la velocità dell'atomo forma con la direzione di propagazione del fotone prima e dopo l'emissione.

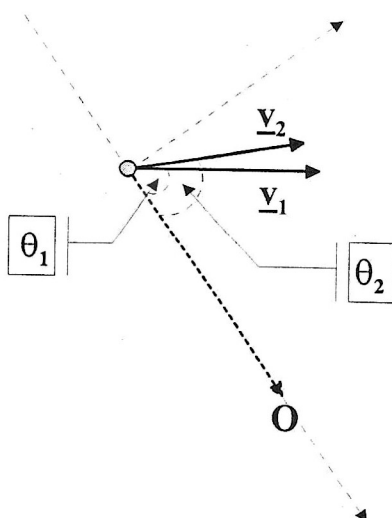


Figura 5.24: emissione di un fotone da parte di un atomo in moto.

Si noti che le velocità, gli angoli e la direzione di propagazione del fotone sono valutati nel sistema di riferimento dell'apparato di misura e che la geometria del processo è planare (piano  $xy$ ).<sup>8</sup>

La conservazione dell'energia richiede che:

$$h\nu = \gamma_1 E_1 - \gamma_2 E_2 \quad (5.28)$$

e quella della quantità di moto:

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \cos \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \cos \theta_2 + \frac{h\nu}{c} \quad (5.29)$$

$$\gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \sin \theta_1 = \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \sin \theta_2 \quad (5.30)$$

dove, al solito,  $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$ ,  $i = 1, 2$ . Dalla (5.28) e dalla (5.29) si ottiene:

$$\gamma_1 E_1 \left(1 - \frac{v_1}{c} \cos \theta_1\right) = \gamma_2 E_2 \left(1 - \frac{v_2}{c} \cos \theta_2\right) \quad (5.31)$$

<sup>8</sup>La trattazione che segue si basa sul lavoro di E. Schrödinger: 'Dopplerprinzip und Bohrsche Frequenzbedingung', *Physikalische Zeitschrift*, 23 (1922), 301 - 303.

All'indirizzo <http://matsci.unipv.it/persons/antoci/mq/Schroedinger22.pdf>, si trova una sua traduzione italiana.

Ponendo:

$$\varphi_i = \gamma_i \left( 1 - \frac{v_i}{c} \cos \theta_i \right) \quad i = 1, 2 \quad (5.32)$$

la (5.31) diventa:

$$\varphi_1 E_1 = \varphi_2 E_2 \quad (5.33)$$

Inoltre, ponendo:

$$\psi_i = \gamma_i \frac{v_i \sin \theta_i}{c} \quad i = 1, 2 \quad (5.34)$$

la (5.30), dopo aver moltiplicato entrambi i suoi membri per  $c$ , diventa:

$$\psi_1 E_1 = \psi_2 E_2 \quad (5.35)$$

Elevando al quadrato la (5.32) e la (5.34) e sommando successivamente membro a membro si ottiene:

$$\varphi_i^2 + \psi_i^2 = \gamma_i^2 \left( 1 + \frac{v_i^2}{c^2} \cos^2 \theta_i - 2 \frac{v_i}{c} \cos \theta_i + \frac{v_i^2}{c^2} \sin^2 \theta_i \right)$$

Questa equazione può essere riscritta così:

$$\varphi_i^2 + \psi_i^2 = \gamma_i \left[ \gamma_i \left( 1 - \frac{v_i}{c} \cos \theta_i \right) + \gamma_i \left( 1 - \frac{v_i}{c} \cos \theta_i \right) \right] + \gamma_i^2 \left( \frac{v_i^2}{c^2} - 1 \right)$$

che, risolta per  $\gamma_i$  (tenendo conto della espressione di  $\varphi_i$  e di  $\psi_i$ ), dà:

$$\gamma_i = \frac{1 + \varphi_i^2 + \psi_i^2}{2\varphi_i} \quad i = 1, 2 \quad (5.36)$$

L'equazione di conservazione dell'energia (5.28) si scrive allora, usando la (5.36), la (5.33) e la (5.35):

$$h\nu = \frac{1}{2} \left( \frac{E_1}{\varphi_1} - \frac{E_2}{\varphi_2} \right)$$

Questa equazione può anche essere scritta nella forma:

$$h\nu = \frac{1}{2} \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_1 \varphi_1} = \frac{1}{2} \frac{E_1^2 - E_2^2}{E_2 \varphi_2}$$

od anche nella forma:

$$h\nu = \frac{1}{\sqrt{\varphi_1\varphi_2}} \frac{E_1^2 - E_2^2}{2\sqrt{E_1E_2}} \quad (5.37)$$

Se ora si pone:

$$\nu^* = \frac{E_1^2 - E_2^2}{2h\sqrt{E_1E_2}} \quad (5.38)$$

si ottiene infine, dalla (5.37):

$$\nu = \nu^* \frac{1}{\sqrt{\gamma_1 [1 - (v_1/c) \cos \theta_1] \times \gamma_2 [1 - (v_2/c) \cos \theta_2]}} \quad (5.39)$$

La (5.39) sembra indicare che la frequenza osservata dipende dalle velocità dell'atomo prima e dopo l'emissione. Ciò non è ragionevole perché, fissata la velocità iniziale dell'atomo, la sua velocità finale dipenderà soltanto dal processo di emissione del fotone e quindi dallo scambio di energia e quantità di moto tra atomo e fotone. Usando la (5.31), la (5.39) diventa:

$$\nu = \frac{\nu^*}{\sqrt{E_1/E_2}} \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c) \cos \theta_1}$$

Quest'ultima, usando la (5.38) e ponendo  $E_1 - E_2 = \Delta E$ , si riduce a:

$$\nu = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1}\right) \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c) \cos \theta_1}$$

Se ora si pone:

$$\nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \left(1 - \frac{\Delta E}{2E_1}\right) \quad (5.40)$$

si ottiene:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c) \cos \theta_1} \quad (5.41)$$

La (5.40) rappresenta la frequenza misurata da un osservatore rispetto a cui la sorgente è in quiete prima dell'emissione del fotone e stabilisce

la relazione tra questa frequenza e la differenza di energia dei due livelli quantici tra i quali avviene la transizione atomica o nucleare: quando  $\Delta E \ll E_1$ , risulta  $\nu_0 \approx \Delta E/h$ . Si confronti ora la (5.41) con la (5.25), riscritta in termini di frequenze:

$$\nu = \nu' \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - (v/c) \cos \theta} \quad (5.42)$$

Come si è visto, la (5.42), può essere ricavata considerando la propagazione di un'onda elettromagnetica piana o la propagazione di un fotone. In entrambi i casi si confrontano le frequenze misurate dai due osservatori in moto relativo prescindendo dalla sorgente. La trattazione alla Schrödinger descrive completamente il fenomeno perché tiene conto della sorgente.

Il termine  $\Delta E^2/2E_1$  rappresenta l'energia di rinculo dell'atomo durante l'emissione; trascurando il termine  $\Delta E$  nel calcolo di  $E_1$  si ha che l'energia di rinculo è di  $3.49 \times 10^{-9} \text{ eV}$  per l'emissione da parte di un atomo di idrogeno di un fotone corrispondente alla riga a  $486.133 \text{ nm}$  e di  $4.67 \times 10^{-2} \text{ eV}$  per l'emissione di un fotone gamma di  $129 \text{ KeV}$  da parte di un nucleo di  $^{191}\text{Ir}$ . Nel caso dell'atomo di idrogeno, l'energia di rinculo è trascurabile rispetto alla larghezza naturale della riga: il fotone emesso può quindi essere riassorbito da un altro atomo di idrogeno. Nel caso dell' $^{191}\text{Ir}$  invece, l'energia di rinculo è grande rispetto alla larghezza naturale della riga e, quindi, il fotone non può essere riassorbito da un altro nucleo di Iridio.

Questa trattazione si applica anche al caso dell'assorbimento. Le equazioni di partenza sono:

$$h\nu = \gamma_2 E_2 - \gamma_1 E_1$$

e:

$$\begin{aligned} \gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \cos \theta_1 + \frac{h\nu}{c} &= \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \cos \theta_2 \\ \gamma_1 \frac{E_1}{c^2} v_1 \sin \theta_1 &= \gamma_2 \frac{E_2}{c^2} v_2 \sin \theta_2 \end{aligned}$$

dove, al solito,  $\gamma_i = 1/\sqrt{1 - v_i^2/c^2}$ ,  $i = 1, 2$ . La relazione finale è:

$$\nu = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - v_1^2/c^2}}{1 - (v_1/c) \cos \theta_1}$$

dove, questa volta:

$$\nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \left( 1 + \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \quad (5.43)$$

Nel caso dell'assorbimento  $h\nu_0$  rappresenta l'energia che un fotone deve avere per essere assorbito da un atomo la cui velocità iniziale (prima dell'assorbimento) è nulla. Si noti infine che la grandezza  $E_1$  ha valori diversi nel caso dell'emissione e dell'assorbimento. Nel caso dell'emissione,  $E_1$  è l'energia a riposo dell'atomo eccitato; nel caso dell'assorbimento,  $E_1$  è l'energia a riposo dell'atomo non eccitato.

Secondo la trattazione svolta, l'effetto Doppler è una conseguenza della discretezza del processo di emissione e di assorbimento da parte di un atomo e delle leggi di conservazione della dinamica relativistica. In particolare, nel processo di emissione, all'energia acquisita (persa) dal fotone - rispetto all'energia quantica  $\Delta E$  - corrisponde un'eguale diminuzione (aumento) dell'energia cinetica dell'atomo; nel processo di assorbimento, l'atomo può assorbire un fotone con energia minore (maggiore) di quella corrispondente al salto quantico  $\Delta E$ , purché esso perda (acquisti) una corrispondente quantità di energia cinetica.

Nel caso in cui l'atomo emittente o assorbente si trovi in un campo gravitazionale di potenziale  $\phi$ , le frequenze  $\nu_0$  date dalla (5.40) e dalla (5.43) avranno l'espressione (si veda a pagina 75):

$$\nu_0 = \frac{\Delta E}{h} \left( 1 \pm \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \sqrt{1 + \frac{2\phi}{c^2}}$$

che, per campi gravitazionali deboli ( $\phi \ll c^2$ ) assume la forma:

$$\nu_0 \approx \frac{\Delta E}{h} \left( 1 \pm \frac{\Delta E}{2E_1} \right) \left( 1 + \frac{\phi}{c^2} \right)$$

dove il segno (-) corrisponde all'emissione ed il segno (+) all'assorbimento. (Si ricordi che  $E_1$  ha un valore diverso a seconda che si tratti di emissione o di assorbimento).



**Nota**

Nel suo articolo, Schrödinger si ferma all'equazione (5.39), con  $\nu^*$  data dalla (5.38). Come si vede, la (5.39) è simmetrica nelle velocità  $v_1, v_2$  dell'atomo prima e dopo l'emissione. Tuttavia, la simmetria matematica è rotta dalla asimmetria fisica: come abbiamo osservato sopra, la velocità dell'atomo dopo l'emissione è *determinata* dalla sua velocità prima dell'emissione e dalle caratteristiche del processo di emissione (l'energia quantica  $\Delta E$  messa in gioco). Ovviamente, Schrödinger era ben consapevole di questo: sorprende, quindi, che egli si sia fermato alla (5.39). L'articolo di Schrödinger è stato rapidamente dimenticato; quando, nel 1924 Debye e Compton useranno equazioni di conservazione dell'energia e della quantità di moto analoghe a quelle usate da Schrödinger, essi non lo citeranno. Le equazioni (5.40) e (5.43) sono oggi comunemente usate per tenere conto dell'energia di rinculo dell'atomo durante i processi di emissione e di assorbimento di fotoni: tuttavia, l'origine di queste formule si è persa nel tempo e la trattazione dell'effetto Doppler luminoso basata sui fotoni è assai rara.

### 9.3 Polarizzazione e fotoni

Le proprietà di polarizzazione della luce sono state finora discusse nell'ambito della descrizione ondulatoria. Essendo la luce costituita da fotoni, questi devono possedere proprietà connesse ai fenomeni di polarizzazione delle onde. I fotoni emessi da un atomo (mediante una transizione di *dipolo elettrico* o di *dipolo magnetico*) possiedono un momento angolare  $\pm\hbar$  (intrinseco o di 'spin') diretto lungo la direzione di propagazione (+) o in direzione opposta (-). Questa proprietà dei fotoni può essere considerata come dovuta alla conservazione del momento angolare in un sistema isolato e dalla regola di selezione per le transizioni di dipolo elettrico o di dipolo magnetico: sono permesse solo le transizioni con  $\Delta l = \pm 1$  o con  $\Delta m = \pm 1$ , rispettivamente ( $l$  è il numero quantico azimutale ed  $m$  quello magnetico), cioè solo quelle transizioni in cui la componente, lungo una direzione arbitraria, del momento angolare dell'elettrone che compie la transizione varia di  $\pm\hbar$ .

D'ora innanzi, indicheremo il momento angolare intrinseco dei fotoni con il termine di *spin* per distinguerlo dal momento angolare *orbitale* associato ad un'onda e, indirettamente, ad un fotone (si veda la sezione 9.3.3).

Consideriamo una sorgente luminosa, costituita da un numero di atomi statisticamente significativo che emettono fotoni mediante una transizione di dipolo elettrico: il 50% dei fotoni emessi ha lo spin diretto lungo la direzione di propagazione (questi fotoni si dicono polarizzati circolarmente in senso destrorso,  $|R\rangle$ ); il restante 50% ha lo spin diretto in direzione opposta (questi fotoni si dicono polarizzati circolarmente in senso sinistrorso,  $|L\rangle$ ).<sup>3</sup>

Se un fotone è polarizzato  $|R\rangle$ , non è polarizzato  $|L\rangle$ ; e viceversa: i due stati di polarizzazione considerati si escludono reciprocamente. Analogamente, si escludono a vicenda i due stati di polarizzazione  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$ , dove  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  denotano due stati di polarizzazione rettilinea lungo due direzioni perpendicolari. Dal punto di vista operativo, se un fotone ha attraversato un Polaroid la cui direzione privilegiata è parallela all'asse  $x$  o  $y$ , il fotone, dopo il Polaroid, è polarizzato  $|x\rangle$  o  $|y\rangle$ , rispettivamente; un fotone  $|x\rangle$  o  $|y\rangle$  non possiede momento angolare.

La descrizione quantistica della polarizzazione di un fotone utilizza il formalismo tipico della descrizione di un sistema fisico che può presentarsi in due stati reciprocamente escludentesi. Scriveremo le formule quantistiche basandoci sull'analogia con la polarizzazione di un'onda elettromagnetica, sottolineando tuttavia che queste formule possono essere scritte partendo dai postulati della meccanica quantistica.

Indichiamo con  $|x\rangle$  e  $|y\rangle$  gli stati di polarizzazione rettilinea di un fotone lungo due direzioni perpendicolari  $x, y$  e con  $|R\rangle$  e  $|L\rangle$  i due stati di polarizzazione circolare. Possiamo allora scrivere:

$$\begin{aligned} |R\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \\ |L\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle + i|y\rangle) \end{aligned} \tag{9.28}$$

dove  $\pm i = \pm e^{i\pi/2}$  introduce i necessari sfasamenti tra le due polarizzazioni rettilinee. Le equazioni precedenti non sono state rigorosamente scritte per analogia: abbiamo infatti introdotto il fattore  $1/\sqrt{2}$  perché,

<sup>3</sup>In molti testi la definizione di polarizzazione destrorsa e sinistrorsa è scambiata.

come vedrà più avanti, la somma dei quadrati dei coefficienti delle combinazioni lineari (9.28) deve essere uguale ad 1.

Osserviamo intanto che, sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni precedenti, si ottiene:

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle + |L\rangle) \\ |y\rangle &= i\frac{1}{\sqrt{2}}(|R\rangle - |L\rangle) \end{aligned} \tag{9.29}$$

Le (9.29) descrivono lo stato di polarizzazione rettilinea del fotone lungo  $x$  e  $y$ , rispettivamente, in funzione degli stati di polarizzazione circolare.

Un fotone può dunque presentare tre distinti stati di polarizzazione: circolare destrorsa, circolare sinistrorsa e rettilinea. Uno stato di polarizzazione circolare può essere descritto come sovrapposizione di due stati di polarizzazione rettilinea; viceversa, uno stato di polarizzazione rettilinea può essere descritto come sovrapposizione di due stati di polarizzazione circolare. Si osservi come lo stato di polarizzazione di un fotone sia descritto mediante un formalismo che utilizza anche fattori di fase, similmente a quanto abbiamo già visto a proposito dei fenomeni di interferenza descritti in termini corpuscolari (si veda la sezione 5.2).

In generale, si deve distinguere tra le proprietà di polarizzazione dei fotoni e quelle dell'onda (descrivente un insieme statisticamente significativo di fotoni): lo stato di polarizzazione di un'onda dipende dallo stato di polarizzazione dei fotoni ma è diverso, in generale, da quello dei fotoni che essa descrive. Per esempio, la sovrapposizione di due fasci *coerenti* di eguale intensità di fotoni circolari destrorsi e sinistrorsi è descritta da un'onda polarizzata rettilineamente.

### 9.3.1 Polarizzazione dei fotoni

Supponiamo che un fascio di fotoni polarizzati circolarmente in senso destrorso incida su un Polaroid ideale la cui direzione privilegiata coincide con l'asse  $x$ : indicheremo tale Polaroid come "Polaroid  $x$ ". La polariz-

zazione di un fotone incidente è descritto dalla:

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\rangle - i|y\rangle) \quad (9.30)$$

La (9.30) è letta in meccanica quantistica nel modo seguente:

- Lo stato di polarizzazione circolare destrorsa di un fotone è rappresentabile come una *opportuna* combinazione di due stati di polarizzazione lineare lungo due direzioni mutuamente perpendicolari. Il termine *opportuna* si riferisce al fatto che nella (9.30) deve essere inserito il fattore di fase  $-i$ , nonché il fattore di *normalizzazione*  $1/\sqrt{2}$ .
- La probabilità che un fotone  $|R\rangle$  attraversi un Polaroid  $x$  è data dal quadrato del coefficiente di  $|x\rangle$  nella (9.30). Essa è uguale ad  $1/2$ .

Ne segue che ogni fotone  $|R\rangle$  ha probabilità  $1/2$  di attraversare un Polaroid  $x$ ; pertanto, l'intensità del fascio di fotoni polarizzati  $|R\rangle$  viene dimezzata dal Polaroid  $x$ . Questa predizione coincide con quella della descrizione ondulatoria. Infatti, l'intensità di un'onda piana polarizzata circolarmente in senso destrorso è proporzionale a  $2E_0^2$ , dove  $E_0$  è il valore massimo del campo elettrico delle due onde polarizzate linearmente che 'la compongono'. Di queste due onde, solo quella polarizzata lungo l'asse  $x$ , la cui intensità è proporzionale a  $E_0^2$ , attraversa il Polaroid  $x$ , mentre l'altra viene completamente assorbita: l'intensità trasmessa è quindi dimezzata rispetto a quella incidente.

Come abbiamo già osservato in precedenza a proposito dei fenomeni di interferenza, anche la descrizione ondulatoria (elettromagnetica) è in grado di predire la sorte di un singolo fotone: è sufficiente introdurre l'ipotesi *ad hoc* secondo cui la probabilità che un fotone attraversi il Polaroid  $x$  è data da

$$p = \frac{E_0^2}{2E_0^2} = \frac{1}{2}$$

Considerazioni analoghe valgono anche per un fascio di fotoni  $|L\rangle$ .

Se il fascio di fotoni incidente sul Polaroid  $x$  è polarizzato linearmente lungo una direzione che forma l'angolo  $\theta$  con la direzione privilegiata del Polaroid, lo stato del fotone prima del Polaroid è descritto dalla:

$$|x\rangle \cos \theta + |y\rangle \sin \theta$$

Pertanto, la probabilità che il fotone attraversi il Polaroid  $x$  è uguale a  $\cos^2 \theta$ . L'intensità del fascio sarà quindi ridotta dal Polaroid dello stesso fattore. Si ritrova così la legge di Malus.

Consideriamo ora un fascio di fotoni polarizzato linearmente che incide perpendicolarmente su una lamina a quarto d'onda di calcite: sia  $\theta$  l'angolo che la direzione di polarizzazione del fotone forma con l'asse ottico della lamina (figura 9.5). Indicando con  $|x'_i\rangle$  lo stato di polariz-

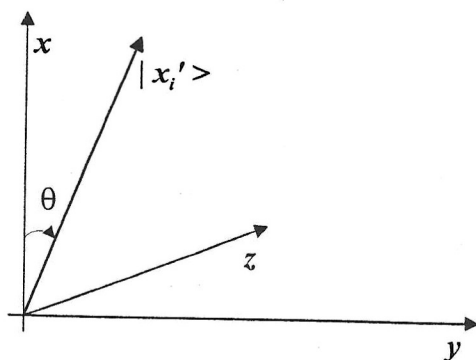


Figura 9.5: un fotone polarizzato linearmente e descritto da  $|x'_i\rangle$  incide perpendicolarmente su di una lamina di calcite a quarto d'onda. Nella figura  $\theta > 0$ .

zazione di un fotone incidente, si avrà:

$$|x'_i\rangle = |x\rangle \cos \theta + |y\rangle \sin \theta$$

Usando le (9.29), e tenendo conto che la lamina di calcite a quarto d'onda introduce un ritardo di fase di  $\pi/2$  nello stato  $|y\rangle$ , si ottiene per lo stato del fotone uscente:

$$|x'_u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |R\rangle (\cos \theta + \sin \theta) + \frac{1}{\sqrt{2}} |L\rangle (\cos \theta - \sin \theta)$$

Questa equazione mostra che il fotone uscente sarà  $|R\rangle$  o  $|L\rangle$  con le seguenti probabilità:

$$P(|R\rangle) = \frac{1}{2} + \sin\theta \cos\theta$$

$$P(|L\rangle) = \frac{1}{2} - \sin\theta \cos\theta$$

che dipendono dall'angolo  $\theta$ . Per  $\theta = \pi/4$  il fotone ha probabilità 1 di essere  $|R\rangle$ ; viceversa, per  $\theta = -\pi/4$ , il fotone ha probabilità 1 di essere  $|L\rangle$ . L'onda uscente sarà quindi, in generale, polarizzata ellitticamente in senso destrorso o sinistrorso a seconda che  $P(|R\rangle) > P(|L\rangle)$  o viceversa. Per  $\theta = \pi/4$  la polarizzazione dell'onda sarà circolare destrorsa; per  $\theta = -\pi/4$  la polarizzazione dell'onda sarà circolare sinistrorsa.

### 9.3.2 Misura della polarizzazione di un fascio di fotoni

Supponiamo che un fascio di fotoni emessi incida perpendicolarmente su un Polaroid. Se facciamo ruotare il Polaroid attraverso un angolo di  $2\pi$  ed osserviamo l'intensità del fascio all'uscita del Polaroid, si potranno verificare tre situazioni:

1. *L'intensità varia passando attraverso due massimi e due minimi nulli:*<sup>4</sup> il fascio incidente è polarizzato linearmente.
2. *L'intensità varia passando attraverso due massimi e due minimi non nulli:* il fascio incidente è polarizzato ellitticamente.
3. *L'intensità del fascio non cambia ruotando il Polaroid:* il fascio incidente non è polarizzato (3a) oppure la sua polarizzazione è circolare (3b). Per distinguere tra queste due possibilità bisogna far passare il fascio prima attraverso una lamina a quarto d'onda e, successivamente, attraverso un Polaroid: se il fascio incidente non è polarizzato, esso sarà non polarizzato anche dopo la lamina e,

<sup>4</sup>I due minimi sono nulli solo se il Polaroid è ideale.

ruotando il Polaroid finale, l'intensità del fascio uscente rimarrà costante. Se il fascio incidente è polarizzato circolarmente, esso uscirà dalla lamina polarizzato rettilineamente lungo una delle due direzioni perpendicolari che formano con l'asse ottico della lamina un angolo di  $\pm\pi/4$ , a seconda che la polarizzazione sia destrorsa o sinistrorsa (si veda la tabella 9.1): l'intensità del fascio uscente dal Polaroid finale presenterà due massimi e due minimi nulli.

Dunque, in generale, un Polaroid non è sufficiente per individuare la polarizzazione di un fascio di fotoni. Tuttavia, usando anche una lamina a quarto d'onda, è possibile determinare senza ambiguità lo stato di polarizzazione del fascio incidente.

Nel capitolo iniziale si è detto che una "misura" è, in generale, una interazione tra il *quid* che, nel mondo, corrisponde all'entità teorica di cui si vuole misurare una proprietà (grandezza fisica) e l'apparato di misura. Pertanto, gli esperimenti necessari per individuare la polarizzazione di un fascio di fotoni sono delle "misure" che possiedono una caratteristica particolare: modificano le proprietà fisiche dei fotoni. Infatti, in ciascuna delle misure, una parte dei fotoni viene assorbita; i fotoni che attraversano l'intero apparato di misura perdono, se lo possedevano, il loro momento angolare. La relazione tra predizione teorica ed esito della misura è complesso:

- a) la teoria è in grado solamente di predire la probabilità dei possibili esiti della misura per quanto concerne il singolo fotone;
- b) la misura *modifica* lo stato di polarizzazione dei fotoni che 'sopravvivono'.

### 9.3.3 Luce e momento angolare

Nelle due sezioni precedenti abbiamo correlato le *proprietà di polarizzazione* della luce descritta come un'onda elettromagnetica allo *spin* dei fotoni. Lo spin dei fotoni è una proprietà descritta dalla meccanica quantistica. Abbiamo quindi posto in relazione due descrizioni completamente differenti: la teoria elettromagnetica (del continuo) di Maxwell e quella quantistica (del discreto).



Va tuttavia ricordato che la teoria di Maxwell prevede che ad un'onda elettromagnetica sia associato, oltre che una quantità di moto, anche un momento angolare. Il valore di questo dipende dalla distribuzione spaziale della quantità di moto associata all'onda, infatti è definito dall'equazione (4.29) che trascriviamo:

$$\vec{j} = \vec{r} \times \vec{g} = \varepsilon_0 [\vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B})]$$

Nel caso di un'onda piana,  $\vec{j}$  è sempre nullo, per ragioni di simmetria: il generico contributo  $\vec{r} \times \vec{j}$  è annullato dal contributo  $-\vec{r} \times \vec{j}$ .

La trattazione quantistica della radiazione elettromagnetica permette di descrivere il momento angolare della radiazione come somma di due termini: il primo è dovuto allo spin dei fotoni e non dipende quindi dal vettore posizione  $\vec{r}$ ; il secondo, detto momento angolare *orbitale*, dipendendo da  $\vec{r}$ , dipende dalla distribuzione spaziale della quantità di moto dei fotoni.

### 9.3.4 Esperimenti con il momento angolare della luce

Il primo esperimento che ha posto in evidenza lo spin dei fotoni, connesso alla polarizzazione dell'onda, è stato condotto da Richard Beth nel 1936 (figura 9.6).<sup>5</sup>  $M$  è una lamina a mezz'onda di calcite sospesa mediante una fibra di quarzo al punto  $P$ . La fibra di quarzo passa attraverso la lamina fissa a quarto d'onda di calcite  $Q$ , la cui superficie superiore è resa riflettente da uno strato di argento. Un fascio di luce polarizzata circolarmente in senso destrorso attraversa, dal basso verso l'alto, la lamina  $M$  e la lamina  $Q$  ed è da questa riflesso verso il basso. Attraversando la lamina a mezz'onda  $M$ , la luce si trasforma da circolare destrorsa ( $D$ ) a circolare sinistrorsa ( $S$ ) (tabella 9.2): i fotoni incidenti cedono il loro momento angolare intrinseco destrorso e ne acquisiscono uno sinistrorso; la lamina  $M$  acquisisce quindi un momento angolare destrorso pari a  $2\hbar$  per ogni fotone che l'attraversa. Attraversando la lamina  $Q$  dal basso verso

<sup>5</sup>R.E. Beth, 'Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light', *Physical Review*, 50, (1936), 115 - 125.

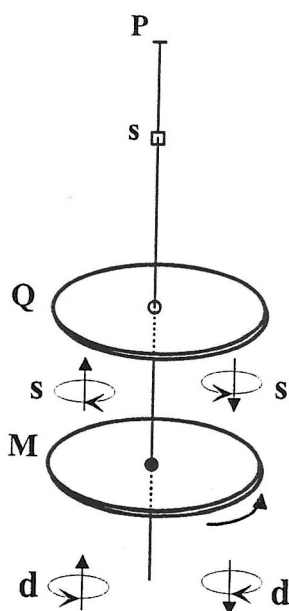


Figura 9.6: schema dell'esperimento di Beth. Si veda il testo.

l'alto, la luce si trasforma da ( $S$ ) in linearmente polarizzata (tabella 9.1); la riflessione sullo strato di argento della lamina  $Q$  introduce uno sfasamento di  $\pi$ ; quindi, riattraversando la lamina  $Q$  dall'alto verso il basso, la luce si trasforma da linearmente polarizzata in circolare sinistrorsa ( $S$ ). Infine, riattraversando la lamina  $M$ , la luce si trasforma da ( $S$ ) in ( $D$ ), cedendo alla lamina un momento angolare pari a  $2\hbar$  per ogni fotone: la rotazione della lamina ha lo stesso verso di quella acquisita per effetto del fascio ascendente. Il fascio di luce è periodicamente interrotto in modo tale che gli impulsi rotatori trasferiti alla lamina  $M$  siano in risonanza con il periodo di oscillazione naturale del sistema. Le oscillazioni del sistema sono osservate mediante un fascio luminoso riflesso dallo specchio  $s$ .

La progettazione e l'esecuzione dell'esperimento deve tener conto della piccolezza del momento angolare del fotone ( $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{ Nm s}$ ) e degli effetti spuri dovuti al fatto che il fascio di luce non è esattamente perpendicolare alla lamina  $M$ .

In anni recenti, queste problematiche hanno ricevuto rinnovata attenzione sia dal punto di vista teorico che sperimentale.<sup>6</sup> In particolare, raffinate tecniche sperimentali hanno permesso di studiare il trasferimento del momento angolare da fasci di luce laser ad aggregati molecolari o a particelle micrometriche (le cui dimensioni sono dell'ordine del micron). Si è così potuto dimostrare che, mentre il momento angolare intrinseco (spin) dei fotoni pone in rotazione le particelle intorno al loro asse, il momento angolare associato al fascio pone in rotazione le particelle rispetto all'asse di simmetria del fascio.

### 9.3.5 Intermezzo: lo spin dell'elettrone

La trattazione (quantistica) degli stati di polarizzazione dei fotoni suggerisce di riprendere la discussione dell'esperimento di Stern e Gerlach effettuato con atomi di argento (si veda la sezione 7.6). Lo stato di un atomo prima del suo ingresso nell'apparato di Stern - Gerlach ( $SG$ ) è descritto dalla:

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad (9.31)$$

dove con  $\uparrow$  e  $\downarrow$  indichiamo i due stati caratterizzati dal fatto che la componente del momento angolare dell'atomo che, in questo caso, coincide con quello intrinseco dell'elettrone di valenza, lungo la direzione  $\hat{z}$  (quella del campo magnetico) è  $+\hbar/2$  e  $-\hbar/2$ , rispettivamente. In questo esperimento, la grandezza fisica che entra direttamente in gioco non è lo spin (momento angolare intrinseco) dell'elettrone di valenza, ma la componente lungo  $\hat{z}$  del momento di dipolo magnetico ad esso associato. Riscriviamo quindi la (9.31), così :

$$|M_z\rangle = \mu_B \frac{1}{\sqrt{2}}(|-\rangle + |+\rangle) \quad (9.32)$$

<sup>6</sup>Si veda, ad esempio: L. Allen, M.J. Padgett, M. Babiker, 'The orbital angular momentum of light', *Progress in Optics*, 39 (1999), 294 - 372.

dove abbiamo tenuto conto del fatto che il momento di dipolo magnetico intrinseco dell'elettrone è diretto in senso opposto al suo spin, cioè che:

$$M_z = -\frac{e}{m} \left( \pm \frac{\hbar}{2} \right)$$

Il simbolo  $| - \rangle$  ( $| + \rangle$ ) rappresenta lo stato in cui la componente del momento di dipolo magnetico lungo  $\hat{z}$  è negativo (positivo). La (9.32) descrive lo stato dell'elettrone di valenza dell'atomo di argento, prima del suo ingresso nell'apparato  $SG$ , per quanto concerne la componente del suo momento magnetico lungo la direzione  $\hat{z}$ . Essa afferma che la probabilità che la componente del momento magnetico dell'atomo di argento lungo l'asse  $z$  sia  $+\mu_B$  o  $-\mu_B$ , dopo l'attraversamento dell'apparato  $SG$ , è  $1/2$ . Ne segue che il fascio di atomi di argento viene suddiviso in due fasci distinti dall'apparato  $SG$ , uno corrispondente a  $+\mu_B$ , l'altro a  $-\mu_B$ .